Princípios Matemáticos Para Física

Caio César Rodrigues Evangelista
&
Wagner Coelho Normando Filho

Departamento de Física - Universidade Federal do Ceará
Bloco 922 - R. Prof Armando Farias
Pici, Ceará, Brasil

Email: caio@fisica.ufc.br

Email: wagnernormando@fisica.ufc.br

Em algum lugar de Düsseldorf dois homens cansados sentam em um bar na beira da estrada. Fred penteia sua barba com os dedos e diz, "Me diga sobre as leis da física, Arthur". Arthur olha para baixo por um instante, então olha para Frederico. "Okay, Fred, mas só os princípios."

Sumário

1 Prefácio

Na frente da academia de Platão havia a seguinte frase "*Não entre quem não souber geometria*". Meu objetivo com essas notas é que se no lugar dessa canônica frase estivesse escrito "*Não entre quem não souber os princípios da matemática* ". Por muito tempo, eu não fui bem-vindo nessa hipotética nova academia de Platão. Antes de entrar na universidade quando terminei o ensino médio, fui até um dos meus professores de física do colégio e perguntei "*Professor, em breve vou começar o curso física, o que eu deveria estudar antes do curso começar pra que eu chegue mais preparado?*", a resposta foi que eu deveria estudar tudo está escrito nessas notas, os fundamentos da física, funções, trigonometria, números complexos e adiantar no possível os conteúdos de cálculo diferencial e integral. Nunca percebi o quão analfabeto em matemática eu era até iniciar meus estudos nesses conteúdos, acho que era próximo ao Natal de 2019. Tive que aprender da forma mais difícil o caminho, a trilha de tijolos amarelos para conseguir ser aceito em nossa hipotética academia de Platão. O objetivo dessas notas é que assim como eu, você faça o caminho das pedras, porém o que estou lhe dando aqui é uma lanterna ao longo deste caminho.

Aproveite a jornada.

> "Eu era uma pessoa comum que estudava muito. Não existem pessoas milagrosas. Acontece que elas se interessam por um assunto e aprendem todas as coisas sobre ele, mas são apenas pessoas."
>
> Richard P. Feynman

- Caio César.

Agradecimentos

O surgimento do minicurso que deu origem a essas notas de fato só foi possível por causa do Diretório Acadêmico do curso de física da Universidade Federal do Ceará - Fortaleza. Algumas pessoas me ajudaram com opiniões enquanto produzia essa notas, muito obrigado: Célio Rodrigues, Victor Lins, Arthur Pasqualotto, Frederico Pedrozo.

E um agradecimento especial ao Wagner Coelho, que aceitou e me ajudou a produzir parte dessas notas para o minicurso dedicado aos calouros do curso de física da universidade federal do ceará, mas que já alcançou alguns estudantes de física de todo o Brasil.

Parte I
O Mínimo dos Princípios

2 A Física Em Sua Essência

"Podemos considerar o estado atual do universo como o efeito de seu passado e a causa de seu futuro. Um intelecto que em um determinado momento conhecesse todas as forças que colocam a natureza em movimento, e todas as posições de todos os itens que a compõem, se esse intelecto também fosse suficientemente vasto para submeter esses dados à análise, ele abarcaria em uma única fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e os do menor átomo; para tal intelecto nada seria incerto e o futuro assim como o passado estaria presente diante de seus olhos."
- Pierre Simon Laplace, Um ensaio filosófico sobre probabilidades.

Você leitor desse livro, pode antes de tudo estar se perguntando *O que é a física?*, mas essa pergunta é de certa forma bem abrangente e responde-la propriamente certamente faria com que algumas boas paginas fossem gastas aqui, uma pergunta muito mais adequada ao que será tratado, seria *o que é a física clássica?* Em particular, a mesma pode ser descrita pode ser ser descrita de maneira breve como um conjunto de regras sobre como as leis de movimento de um certo sistema são e como elas predizem o futuro. Na física clássica se conhecido tudo sobre um sistema em um instante de tempo e também as equações que descrevem que descrevem a dinâmica do mesmo, então seria possível prever o futuro desse sistema. É isso que significa um sistema ser dito **determinístico** Na verdade, existem dois tipos de perguntas que sempre aparecem e que serão continuamente discutidas ao longo deste capitulo.

1. *Quais são as leis especificas que regem um sistema?*

Sistema esse que poderia ser por exemplo, um planeta se movendo em volta de uma grande massa. Este sistema possui suas leis particulares, leis essas que são diferentes das leis que ditam partículas eletricamente carregadas movendo-se em um campo magnético de um ímã. Essas são leis particulares da natureza, mas isso implica dizer então que existem leis de uma estrutura muito maior.

2. *Quais são as regras para as leis permitidas ? Existem regras para as leis permitidas? Qual a grande estrutura em que todas as leis especificas estão contidas?*

A segunda pergunta é a que realmente estamos interessados, porém é a primeira que vai fornecer ilustrações e imagens dos princípios que governam quais são as leis da física permitidas.

2.1 O Universo Em Uma Moeda

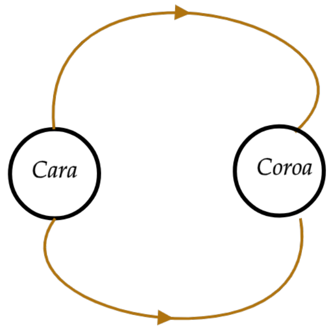
Vamos tomar o sistema mais simples possível dentro do nosso propósito. Uma moeda. A única coisa relevante sobre a moeda é se ela se encontra em *cara* ou *coroa*, ou seja, a moeda possui dois **estados de configuração**, dois valores.

Mas ainda é possível fazer esse sistema se tonar mais simples se considerarmos uma "moeda de um lado", ou seja, uma moeda que apenas possui cara, ou apenas possui coroa. O que seria uma condição inicial para esse sistema? Uma condição inicial seria um dos estados que constituem este sistema, cara ou coroa. Mas e suas leis de movimento? Na física clássica usualmente é suposto que os sistema evoluem continuamente, i.e, sem nenhum salto ou interrupção, mas não ha como virar de cara para coroa e vice-versa continuamente, então, se imaginarmos o tempo em pequenos intervalos *inteiros*($t \in \mathbb{Z}$), então a única coisa que aconteceria com a moeda de lado único seria nada, não haveria alteração pois apenas existe um único estado de configuração, o que implica dizer que a história da moeda seria ou apenas coroa ou apenas cara.

Convenhamos que a mesma é uma lei da física um tanto quando entendiante, porém, ela não deixa de ser muito forte, pois ha uma descrição perfeita do sistema. Seja qual for a condição inicial do sistema, é fácil saber qual o estado que o mesmo se encontra em um instante arbitrário por toda a linha do tempo. Se por acaso a condição inicial for *Cara*, então a historia de todo o sistema sempre será *Cara Cara Cara Cara....* De forma semelhante o mesmo vale para a condição inicial *Coroa*. É válido então dizer que isto é um exemplo de um sistema dinâmico com uma lei de movimento em que a lei de movimento é que *não há movimento algum*.

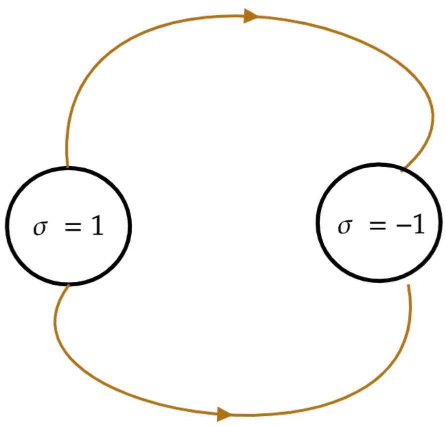
Há mais uma lei de movimento que pode ser imaginada para o sistema de uma moeda. É aquela que qualquer que seja o estado em um instante de tempo, no instante posterior o estado é o oposto.

$$\begin{cases} Cara \rightarrow Coroa \\ Coroa \rightarrow Cara \end{cases}$$



A historia de todo o sistema agora se dado como condição inicial *Cara*, seria *Coroa*$\rightarrow$ *Cara*$\rightarrow$ *Coroa*$\rightarrow$ *Cara*$\rightarrow$... ou com *Coroa* seria, *Cara*$\rightarrow$*Coroa*$\rightarrow$*Cara Coroa*$\rightarrow$... . Ainda é um tanto quanto entendiante, mas continua sendo mais interessante do que o anterior.

É possível escrever matemática para melhor descrever este sistema, ou seja, é possível escrever uma equação de movimento. Se torna necessário tomar uma variável que assuma dois valores, ja que o sistema possui dois estados possíveis, σ(por exemplo). Se tomado $\sigma = 1$ para *Cara* e $\sigma = -1$ para *Coroa*, então a ilustração do sistema se torna a seguinte,



Com isso, esta constituída a ideia intuitiva do que na física é um **espaço de configuração**, nesse caso especial, rotulado por dois valores possíveis de uma única variável.

Considerando o tempo t estroboscópico[1] em que $t \in \mathbb{Z}$, como anteriormente, escrevendo em termos matemáticos uma expressão para $\sigma(t)$ [2] para o sistema em

[1]Um tempo ser estroboscópica significa que a evolução do sistema e dada de forma discreta
[2]Você em breve saberá o que significa $\sigma(t)$ quando estudar sobre funções no próximo capitulo

que a moeda possui um lado único,

$$\sigma(t) = \sigma(t+1) \tag{2.1.1}$$

Para qualquer que seja o valor de σ em um instante (lê-se, discreto) t, σ terá o mesmo valor no próximo instante.

Exercício 1.1:
Agora tome o sistema em que há uma mudança no estado de configuração da moeda de acordo com a condição inicial, aquele em que qualquer que seja o estado inicial, o próximo é o oposto. Monte uma equação para o mesmo em que a cada instante de tempo há um estado de configuração oposto.

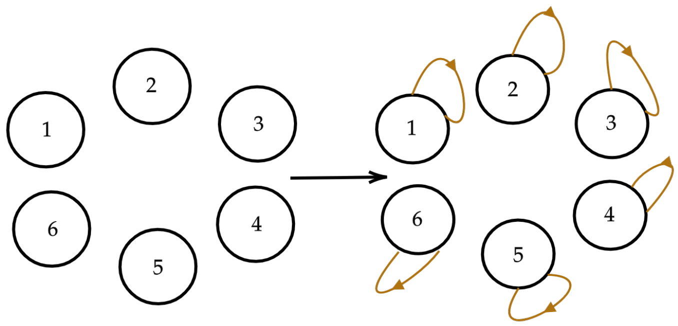
Note que como estes sistemas são completamente preditivos, completamente determinístico, não há alguma ambiguidade sobre o que acontece no futuro. Por acaso, enquanto estes estudos sobre a moeda estivessem sendo realizados, alguém poderia vir a interferir e balançar um pouco a moeda, na nossa linguagem, isso seria porque o sistema não se encontrava **fechado**, alguém que não fazia parte do sistema interferiu. Mas chega de falar de moedas.

Exercício 1.2:

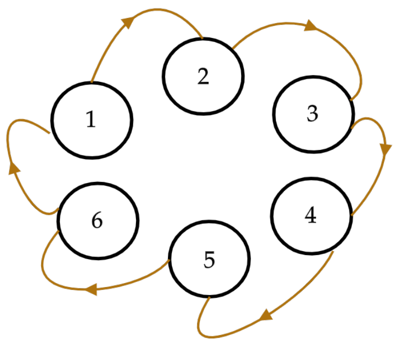
Como essa noção é tao importante para a física teórica em particular. Reflita sobre o que um sistema fechado é, eles realmente podem existir? Que suposições estão implícitas em assumir a existência de um sistema fechado? O que é um sistema aberto?.

2.2 O Universo Em Um Dado

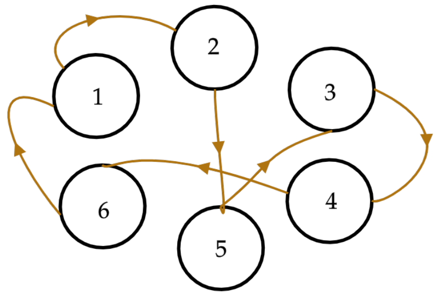
Um sistema um pouco mais "complicado"seria um dado. Um dado possui seis estados: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Para todos os propósitos deste capitulo, essa é a única importância no que diz respeito ao dado.



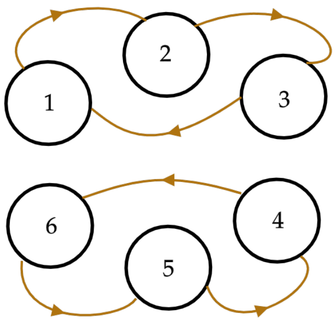
Uma condição inicial seria uma escolha de uma das seis configurações presentes. Qual seria uma possível lei da física para este sistema? Uma lei bem simples e trivial seria *nada acontecer*, assim como na moeda de um lado só. Uma lei muito mais interessante seria a que há um ciclo pela coleção de configurações.



Ainda é possível escrever outras leis, por acaso, um ciclo na direção oposta do ilustrado, seria outro exemplo, ou um mais "complicado"seria o seguinte.



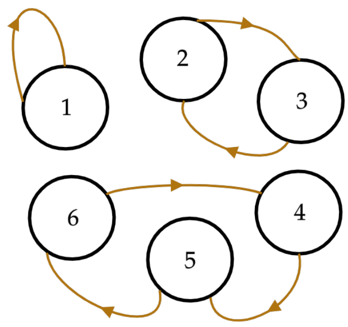
Note como este ultimo e aquele em que havia um ciclo em uma única direção por todos os estados, são *logicamente equivalentes*. Urge então a ideia intuitiva da necessidade da busca por sistemas logicamente equivalentes dentro do estudos de sistemas físicos. Tome o seguinte:



Exercício 1.3:

Explique explicitamente porque o sistema em que ha um ciclo pelas configurações existentes e o ciclo aparentemente mais complicado, são logicamente equivalentes.

Novamente, é completamente determinístico, mas não é logicamente equivalente para nenhum dos anteriores, e se o sistema inicia em algum dos ciclos, ele nunca ira alcançar o outro ciclo. Mas veja que não são dois sistemas diferentes, ainda se trata um único dado com seus respectivos seis estados, porém para o mesmo sistema, existem dois ciclos e devido a essa lei particular da física deste dado, dependendo da condição inicial você fica "preso"em um dos ciclos. Existe um nome para o qual este tipo de comportamento, é chamado de uma **quantidade conservada**. Uma quantidade conservada, é algo não trivial que pode ser usado para rotular um sistema, a qual não varia com o tempo, ou seja, o tempo pode passar o quanto for, a aquela quantidade sempre vai se permanecer a mesma. Ainda é possível rotular os ciclos assinalando valores para cada um deles, por exemplo, se assinalado o valor 1 ao primeiro ciclo e 2 ao segundo, então é valido dizer que se iniciado em 1, a quantidade conservada 1 é a que se manterá por todo a historia do sistema. Tomando mais um exemplo:



Há um total de trés quantidades conservadas em um único sistema, diferente do anterior, em que haviam apenas duas, em que o valor 0 pode ser associado com a primeira quantidade conservada então assim ser chamada de quantidade conservada de valor 0, e da mesma forma para a quantidade 1 e 2 por exemplo.

Exercício 1.4:

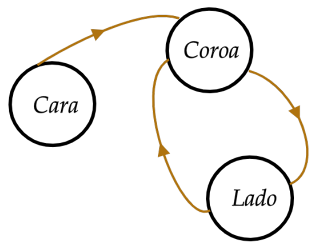
.

Você consegue pensar em uma forma geral de classificar as leis possíveis para um sistema de seis estados?.

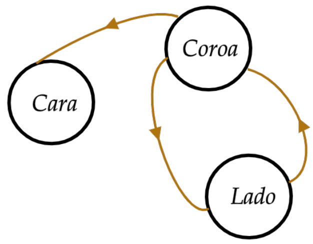
2.3 Leis Não Permitidas

Infelizmente, o universo tem suas restrições e nem todas as leis que você possa imaginar teriam como acontecer de alguma forma. É suficiente que uma lei dinâmica seja determinística - porem necessariamente também tem que ser reversível.

O significado de reversível - na física, pode ser descrito de maneiras diferentes. A mais imediata, lembrando dos diagramas discutidos é que se revertida todas as flechas, a lei resultante também deve ser determinística, o que inclui determinismo no passado e no futuro.



Uma moeda de trés lados com essa respectiva lei de movimento acima será algo não permitido entre os meios da física clássica. Ate então uma das observações feitas sobre cada sistema foi como todos são completamente preditivos sobre o futuro, e fato este acima também é, mas o que é verdadeiramente impar sobre o mesmo é como ele não é completamente preditivo sobre o passado[3], não ha qualquer ambiguidade no futuro, mas o passado se torna outra questão. Se por acaso em algum instante de tempo posterior a condição inicial, o sistema se encontrar no estado de *Coroa*, se torna ambíguo dizer qual a condição inicial, seria o *Lado* da moeda ou seria *Cara*. Sistemas com este comportamento é o que comumente é chamado de não reversível ou irreversível, veja abaixo o que acontece quando revertemos as flechas, o estado de *Cara* nao possui passado



Agora há uma situação totalmente não preditiva em que dependendo da condição inicial, o sistema simplesmente deixa de evoluir e para.

Exercício 1.5:

Caracterize pela descrição de diagramas(leis de movimento) se uma lei física é possível ou não.

Existe uma maneira muito simples de determinar se um diagrama representa uma lei reversível. Se cada estado possui uma única flecha que leva a ele e que sai dele, então, se trata de uma lei reversível determinística. Deve existir uma flecha que indica aonde as coisas estão indo e outra indicando de onde estão vindo. Isso pode ser chamado de **conservação da informação**, ela simplesmente garante que nunca seja perdido de vista o estado inicial.

Exercício 1.6:

A conservação da informação pode ser considerada uma lei de conservação convencional de fato? Tente refletir um pouco sobre qual seria um valor limite plausível de velocidade da informação.

Durante este capitulo foi visto como sistemas dinâmicos extremamente simplesmente podem representar fortes leis que governam o universo, o que são estados, espaços de configuração, leis de conservação, leis não permitidas. Mas

[3]Isto é um problema porque uma das bases filosóficas da mecânica clássica é que o tempo é absoluto e a natureza completamente determinística, então as equações de movimento também deveriam descrever o passado daquele sistema, dentro do proposto.

acima de tudo, como tudo isso depende de uma ferramente extremamente necessária para que o entendimento claro e objetivo destas lei seja concretizado, a matemática.

Parte II
Ferramentas Essenciais

3 Funções

3.1 Uma noção intuitiva

É importante iniciar o estudo de funções por uma construção intuitiva do que seria uma função. Considere que exista uma máquina que recebe números. Por questão de didática vamos dar o nome de Λ para essa nossa máquina. Após receber um número, a máquina realiza alguma operação desconhecida com o número recebido e devolve um outro número.

Note que ao ser inserido o número 4, a máquina devolve como resultado, o número 9. Veja outros exemplos:

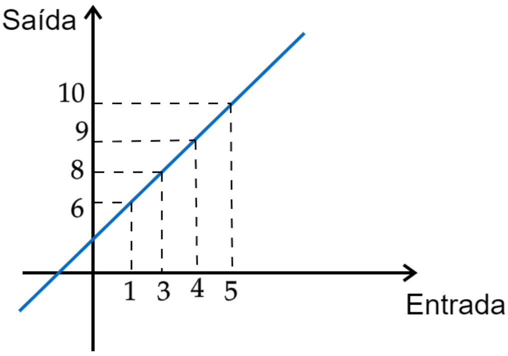
Para um valor 3 de entrada na maquina, resulta em:

Isso já é suficiente para perceber o que a máquina faz. A máquina processa um número inserido e retorna esse número acrescido de 5. É possível organizar os resultados dessa máquina em forma de tabela, da seguinte forma:

Λ	
Entrada	Saida
4	9
1	6
3	8
5	10

A tabela acima é uma outra forma de representar máquina Λ.

Uma outra forma, extremamente importante, e até mais simples, de representar os dados da tabela, é por meio de um gráfico. Utilizando dos eixos coordenados do comumente chamado plano cartesiano, associar esses valores de entrada e saída da tabela a um ponto.



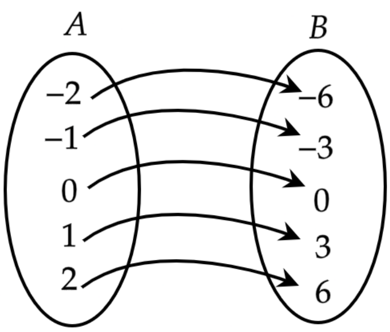
Os pontos que constituem o gráfico são justamente as entradas e as saídas da máquina Λ. Esses pontos recebem o nome de pares ordenados. Assim, $(4,9)$ é um par ordenado, por exemplo.

Assim, por meio da máquina Λ, um conjunto de valores é mapeado a um outro conjunto de valores, de forma que este mapeamento é feito sempre adicionando o número 5. Essa é a função matemática que descreve esse maquinário.[4]

Exercício 3.1:

Dada essa noção intuitiva de função, crie você mesmo, uma função Θ qualquer, e represente ela por meio de uma tabela e gráfico.

Com a ideia intuitiva apresentada, é possível construir uma noção mais completa, do ponto de vista matemático, do que é uma função. Mas antes de partir para tal definição, é necessário introduzir a noção de um conjunto.



Representação de dois conjuntos. Em que há uma correspondência um a um, para cada elemento de A, existe um elemento correspondente em B.

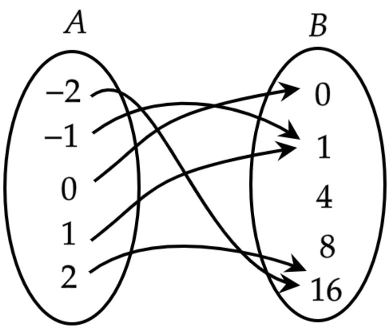
Este tipo de diagrama é bem comum para representar conjuntos e a correspondência de seus elementos. Com efeito, os conjuntos A e B apresentam uma regra de associação, Cada elemento de A está associado ao seu triplo em B. A notação usual é que um elemento arbitrário do conjunto A, é representado como, $x \in A$, e de B, $y \in B$.

[4]O conceito de função é algo muito mais profundo e está atrelado a abstrações matemáticas que fogem do escopo da descrição de fenômenos naturais.

$x \in A$	$y \in B$
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6

Vale notar que a cada um dos elementos do conjunto A, ha um único um elemento correspondente em B. O que vai fazer com que essa correspondência existe, é uma função, neste caso $y = 3x$.

Um exemplo direto seria o seguinte, considerando dois conjuntos A e B tais que, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $= \{0, 1, 4, 8, 6\}$. Se o mapeamento entre A e B for dado por $y = x^4$, com x $\in$ **A** e y $\in$ **B**, então:



Neste caso, nem todos os elementos são completamente mapeados, alguns elementos do conjunto B, não são mapeados, ou seja, de alguma forma, o mapa $y = x^4$, não possui elementos que correspondem a $\{4, 8\}$ em B.

3.2 Definição Formal

Definição 3.1. *: Uma função f de* A *em* B*, denotada por* f : A $\rightarrow$ B*, é uma lei que associa cada elemento de* A *a um único elemento de* B*.*

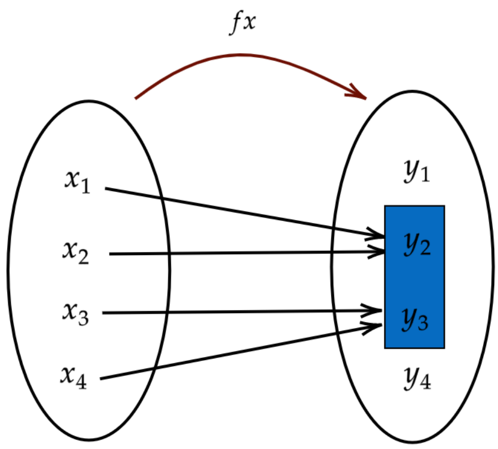
Com essa definição em mente, sejam A e B dois conjuntos. Onde, A = {t| t é um instante de tempo} e B ={x| x é uma posição no espaço ao longo de uma direção horizontal}. Para esses dois conjuntos, é possível tomar a seguinte lei; dados $t \in$ A e $x \in$ B, t está associado a x, quando, em um dado instante t, x é a posição de uma partícula no instante t.

Exercício 3.2:

Considerando todos os exemplos anteriormente citados, crie uma função, expresse-a por meio de um diagrama de flechas e certifique-se de que ela vai obedecer as duas condições mostradas nos exemplos.

Dentro da definição formal de função existem algumas sutilezas discretas que precisam ser mencionadas, que constantemente serão mencionadas e utilizadas.

Dada um função f de A em B, o conjunto A chama-se de **domínio** da função, D_f, e o conjunto B, **contradomínio** da função, C_f. Então, para $x \in$ A, o único elemento em B associado a x pela função f é denominado *imagem de x por x* sendo denotado usualmente por $f(x)$.



A região cinza, cobre os valores y_2 e y_3, que é a imagem da função. Dessa forma o conjunto $\{f(x)|\ x \in \mathsf{A}\}$ é denominado de imagem f, sendo denotado por I_f. Com isso , tem-se que, $I_f \subseteq C_f$, o conjunto imagem da função está contido no contradomínio.

Uma ressalva importante é que se por acaso, $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ for uma função. Então f é uma função de variável real quando $\mathsf{A} \subseteq \mathbb{R}$ ou que f é de valor real quando $B \subseteq \mathbb{R}$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) = x^2 + x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.2.1}$$

Então,
$f(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{5}{9}$

$f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) - 1 = x^2 + 2x + 1 + x + 1 - 1 = x^2 + 3x + 1$ [5]

Outro exemplo, agora considerando a função g, dada por:

$$g(x) = x + 1 \tag{3.2.2}$$

É possível ver que não há nenhuma restrição na função, $x + 1$ pode assumir qualquer valor, consequentemente, $C_g \equiv \mathbb{R}$ e $D_g \equiv \mathbb{R}$.

Porem, para uma função da forma,

$$h(x) = \frac{1}{x - 2} \tag{3.2.3}$$

Há uma forte restrição no domínio dessa função, i.e, valores que x pode assumir para que a função continue sendo bem definida, pois se $x = 2 \Longrightarrow h(2) = \frac{1}{0}$, que é uma indefinição. Então, $C_h \equiv \mathbb{R}$ e $D_f = \{x \in \mathbb{R}|\ x \neq 2\}$

Por ultimo, se por acaso, $f(x) = \sqrt{x - 3}$, então, $C_f \equiv \mathbb{R}$ e $D_f = \{x \in \mathbb{R}|\ x \geq 3\}$

[5] Caso não tenha entendido este exemplo, vá ate o Apêndice II.

Exercício 3.3:

Encontre o domínio das seguintes funções:*(a)*$f(x) = \sqrt{2x+4}$. *(b)* $f(x) = \dfrac{5}{x+1}$

Com a ideia de domínio,imagem e contradomínio em mente, se torna possível definir o gráfico de uma função.

Definição 3.2 (Gráfico de Uma Função). *: Sendo f : A $\rightarrow$ B uma função, o gráfico de f é o conjunto denotado por G_f e dado por:*

$$G_f = \Big\{(x, f(x))|x \in A\} = \{(x,y)|x \in D_f,\ \ y = f(x)\Big\}$$

Definição 3.3 (Produto Cartesiano). *Dados* A *e* B *conjuntos não vazios, logo:*

$$\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \{(x,y)|x \in A,\ \ y \in B\}$$

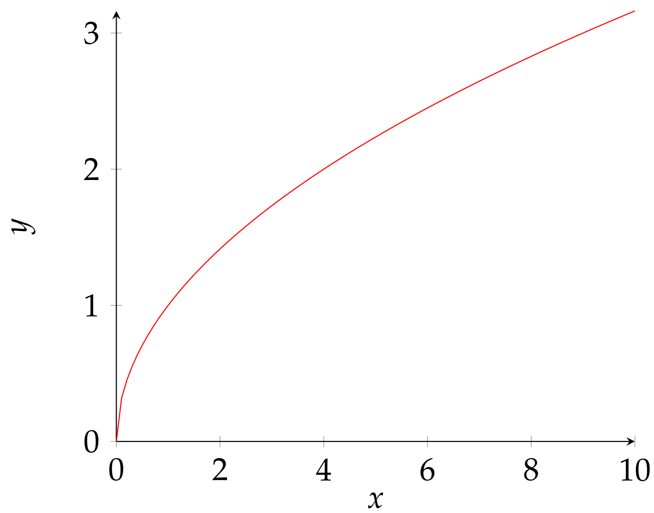
em que A × B *é chamado de produto cartesiano entre* A *e* B

Então, como de forma geral, f é uma função de A em B, por consequência direta, $G_f \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{B}$

Tendo em vista as definições (3.2) e (3.3), considere a função, $f(x) = \sqrt{x}$, rapidamente, $D_f = \{x \in \mathbb{R}|x \geq 0\}$ e uma propriedade direta é que $f(x+\lambda) = \sqrt{x+\lambda}$, $\forall x \geq -\lambda$, t.q, $\lambda \in \mathbb{R}$. A lei de formação dessa função é do tipo $y = \sqrt{x}$. Com efeito, a medida que x cresce, y também cresce. Contudo, o crescimento de y é mais lento que o de x; quando x se aproxima de zero, y também se aproxima de zero, de forma mais lenta.

$$G_f = \{(x,y)|y = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}\} \tag{3.2.4}$$

Então o gráfico de f, é:



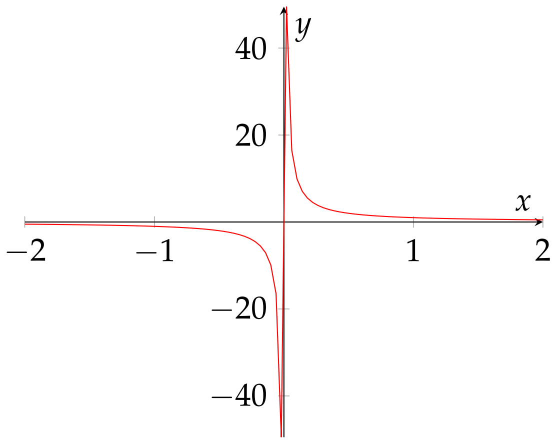
Considerando agora, uma f dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{3.2.5}$$

Diretamente, o domínio de f, é $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$, o que significa que f associa a cada $x \neq 0$ um numero real $f(x) = \dfrac{1}{x}$, de forma que $f(x + \lambda = \dfrac{1}{x+\lambda}$, $\forall x \neq -\lambda$. E gráfico de f é definido como,

$$G_f = \left\{ (x, y) | y = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.2.6}$$

Para $x \geq 0$,tem-se que a medida que x vai aumentando, y vai cada vez mais tendendo a 0. Por outro lado, a medida que x se aproxima de 0, y fica cada vez maior. Vale notar que uma situação contrária acontece para $x \leq 0$.



Exercício 3.4:

Dada a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{3-x}$, determine seu domínio e plote seu gráfico.

Uma função pode possuir diversos pontos, p em que $f(p) = 0$. Pontos em que $f(p) = 0$, são chamados de **raízes da função** e pode se tornar um problema tao complicado quando se queira. Um dos maiores problemas da matemática é atual é achar um mecanismo analítico para determinar as raízes da função zeta de Riemann, por exemplo.

> **Definição 3.4** (Raiz de Uma Função)**.** *Considere f uma função e $p \in \mathbb{R}$. p é raiz de f quando $p \in D_f$ e $f(p) = 0$*

Para encontrar por exemplo as raízes da função $f(x) = x(1-x)(x+2)$, basta verificar os pontos em que f resulta em zero, ou seja, p, t.q, $f(p) = 0$.

$$f(p) = 0 \iff p(1-p)(p+2) = 0 \iff p \in \{0, 1, -2\} \tag{3.2.7}$$

É muito importante, para futuras aplicações, conhecer o comportamento do gráfico de uma função. Isso quer dizer que em muitos problemas, conhecer a região em que uma função cresce pode fornecer informações relevantes para a descrição de algum fenômeno físico, como por exemplo, no comportamento elástico de uma mola. A partir de um dado regime, a mola não volta mais para o seu formato inicial. Esse regime de elasticidade, pode ser expresso por meio de um gráfico de uma função. Saber em que instante uma função vai apresentar uma comportamento decrescente, pode vir a ser útil para o estudo da velocidade dos corpos em cinemática. Além disso, saber em que ponto uma função possui zero, é usado para saber o alcance máximo de projéteis quando se estuda lançamento de corpos. Dessa forma, tornas-e necessário fazer o estudo do sinal de uma função!

Definição 3.5 (Estudo do Sinal)**.** *Sendo f uma função, estudar o seu sinal é encontrar três conjuntos:*

i . $\{x \in D_f | f(x) > 0\}$

ii . $\{x \in D_f | f(x) = 0\}$

iii . $\{x \in D_f | f(x) < 0\}$

Exercício 3.5:

Considerando as funções dadas nos exercícios 3.4 e 3.3, faça o estudo de seu sinal. Observe o que acontece com o gráfico da função nos pontos do domínio que obedecem a definição 3.4.

Comportamentos lineares acontecem com certa frequência na natureza, o exemplo mais direto é a equação $x = vt$, do movimento uniforme em $x = x(t)$, com isso,

3.3 Função Afim

Definição 3.6 (Função Afim)**.** *Uma função* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se função afim quando* $\exists a, b \in \mathbb{R}$*, t.q:*

$$f(x) = ax + b$$

Exemplos

1. $f(x) = 2x + 1 (a = 2, b = 1)$
2. $f(x) = -x + 4 (a = -1, b = 4)$

Funo Linear

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax\ \forall x \in \mathbb{R}$. Nesse caso $b = 0$

Exemplos

1. $f(x) = -2x (a = -2)$
2. $f(x) = \frac{1}{5}x (a = \frac{1}{5})$

Funo Constante

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b\ \forall x \in \mathbb{R}$. Nesse caso $a = 0$

Exemplos

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = -2$

Funo Identidade

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Nesse caso $a = 1$ e $b = 1$

Translao

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + b \ \forall x \in \mathbb{R}$. Nesse caso $a = 1$ e $b \neq 0$
Exemplos

1. $f(x) = x + 2$
2. $f(x) = x - 3$

O conceito de valor inicial, também chamado de condições iniciais, é de extrema importância em física. Tal ideia consiste em fazer certas considerações encima do comportamento de um sistema.Essa considerações estão muitas vezes relacionadas ao próprio comportamento da natureza.
Algumas vezes podem ser aproximações com o intuito de facilitar o desenvolvimento. Um bom exemplo, é o caso da física clássica. Conhecendo-se as forças que atuam sobre a partícula,é possível em princípio a partir daquelas informações iniciais obter a posição e a velocidade (ou momento) da mesma em qualquer instante futuro, ou seja, o estado futuro da partícula.

Dentro do contexto da função afim, $f(x) = ax + b$, o número $b = f(0)$ é chamado de valor inicial da função f.

Exemplo

Considere a função afim abaixo:

$$f(x) = 4 + \frac{5}{6}x \tag{3.3.1}$$

Para determinar o valor inicial de f, fazemos:

$$f(0) \to f(0) = 4 + \frac{5}{6}(0) \tag{3.3.2}$$

$$f(0) = 4 = b. \tag{3.3.3}$$

Exercício 3.6: Faça o estudo do sinal da função afim usando a expressão 3.4.1. O que acontece com o gráfico para valores positivos e negativos de **a**?

Sejam $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para x_1 e x_2 números reais quaisquer, com $x_1 \neq x_2$. O objetivo é buscar **a** e **b**. Fazendo uso da equação (3.4.1) e substituindo os pontos conhecidos, encontra-se duas equações. Assim:

$$y_1 = f(x_1) = ax_1 + b \tag{3.3.4}$$

$$y_2 = f(x_2) = ax_2 + b \tag{3.3.5}$$

As equações (3.4.5) e (3.4.6) relacionam-se pelo termo b. Logo, para encontrar **a**:

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = \tag{3.3.6}$$

$$= ax_2 + b - ax_1 - b = \tag{3.3.7}$$

$$= a(x_2 - x_1). \tag{3.3.8}$$

Isolando **a** na equação acima, chega-se em:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3.3.9}$$

Para encontrar o valor de b, basta substituir a equação (3.4.10) em (3.4.5), então:

$$y_1 = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})x_1 + b \tag{3.3.10}$$

Multiplicando e dividindo **b** por $x_2 - x_1$:

$$y_1x_2 - y_1x_2 = y_2x_1 - y_1x_1 + bx_2 - bx_1 \tag{3.3.11}$$

Finalmente:

$$b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} \tag{3.3.12}$$

3.4 Função Quadrática

Definição 3.7 (Função Quadrática)**.** *Uma função f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita ser quadrática se existirem* **a**, **b**, **c** *com* **a** $\neq 0$*, tal que:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.4.1}$$

Exemplos

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1(a = 3, b = -2, c = 1)$
2. $f(x) = x^2 - 4(a = 1, b = 0, c = -4)$

Pela definição da seção (3.3.3) onde foi apresentado sobre as raízes de uma função, existe então um número $p \in \mathbf{D_f}$ tal que f(p) = 0. Logo:

$$p^2 + bp + c = 0 \tag{3.4.2}$$

Que é a famosa equação do segundo grau. A solução da equação (3.5.2) já foi muito bem explorado na antiguidade, muitas civilizações já conheciam métodos de encontrar as raízes de uma equação desse tipo. Os babilônios ao lidar com problemas de áreas, caiam em equação do segundo grau. Eles tinha uma método que não usava símbolos ou fórmulas para encontrar a solução da equação.
Nesse período, o problema era dado da seguinte forma:

Determinar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p

Se x for uma desses números, o outro será $s - x$. E o seu produto é dado por $p = x(s - x)$. Então:

$$x^2 - sx + p \tag{3.4.3}$$

Para a equação acima, $a = 1$, $b = -s$ e $c = p$
Um dos métodos mais comuns de encontrar as raizes de uma equação que assume essa forma, é recorrer a relação de Bhaskara.
Proposição A relação:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.4.4}$$

Fornece as raízes de uma equação do segundo grau.

Demonstrao

Seja uma equação do segundo grau dada por:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.4.5}$$

Logo:

$$ax^2 + bx = -c \tag{3.4.6}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \tag{3.4.7}$$

Do lado esquerdo da equação acima, é possível completar o quadrado da seguinte forma:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \tag{3.4.8}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \tag{3.4.9}$$

Dessa forma:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{4b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{3.4.10}$$

Tirando a raiz dois dois lados:

$$\pm\sqrt{x + \frac{b}{2a}} = \pm\sqrt{\frac{4b^2 - 4ac}{4a^2}} \tag{3.4.11}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.4.12}$$

Isolando o x e somando as frações:

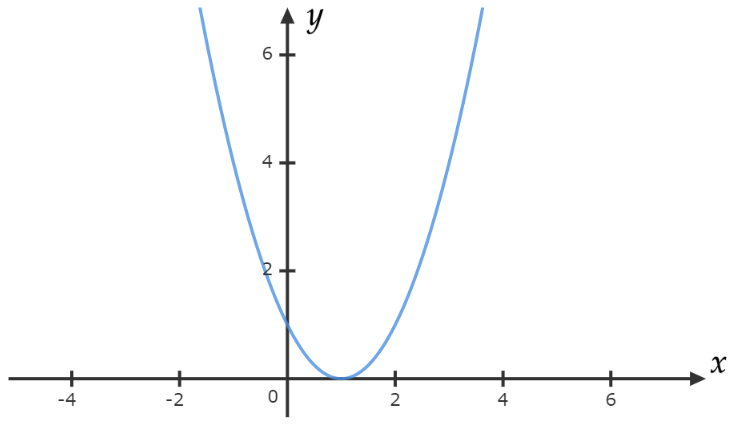
$$x = \frac{b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.4.13}$$

Como queríamos demonstrar.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Assim o conjunto de pontos tais que $\{(x, y) | y = ax^2 + bx + c, x \in \mathbb{R}\}$ constituem o gráfico da função. Considerando, por exemplo, as seguintes funções quadráticas:

Exemplos

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \tag{3.4.14}$$



Do gráfico acima é possível achar duas informações importantes:

1. Intersecção com o eixo **y**

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 2(0) + 1 = 1 \tag{3.4.15}$$

a função corta o eixo y no ponto (0,1)

2. Intersecção com o eixo **x**

Para achar onde a parábola corta o eixo x, precisamos achar os valores x tais que $f(x) = 0$. Logo:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \tag{3.4.16}$$

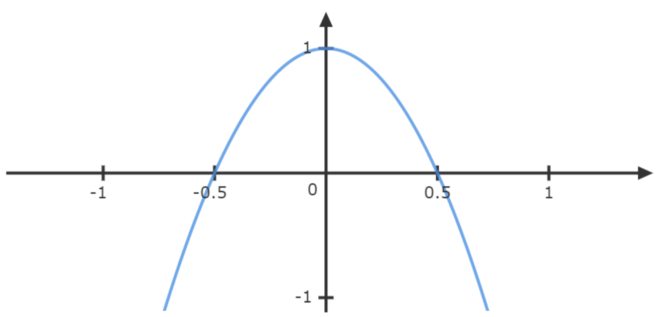
$$\Delta = 4 - 4 = 0 \tag{3.4.17}$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2} \tag{3.4.18}$$

O parábola intersecta o eixo **x** em um único ponto (1,0). Ou seja, a raiz dessa função é de multiplicidade 2.

Seja a seguinte função:

$$f(x) = -4x^2 + 1 \tag{3.4.19}$$



1. Intersecção com o eixo **y**

$$f(0) = -4(0)^2 + 1 = 0 = 1 \tag{3.4.20}$$

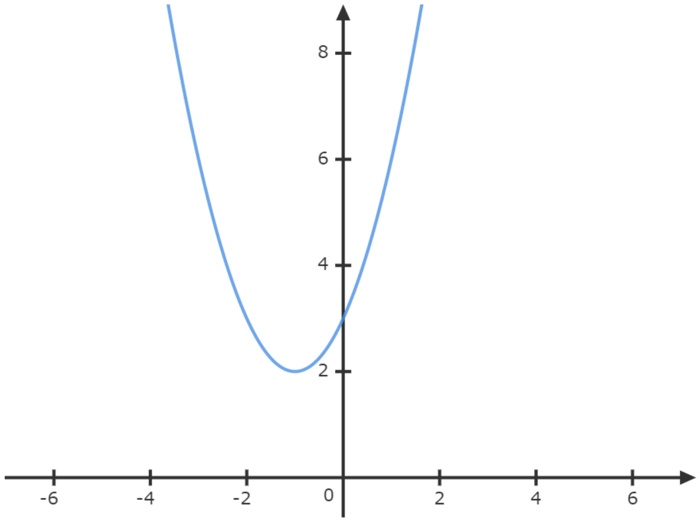
A função corta o eixo y no ponto (0,1)

2. Intersecção com o eixo **x**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2} \tag{3.4.21}$$

Como último exemplo, considere o caso especial:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \tag{3.4.22}$$



1. Intersecção com o eixo **y**

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 + 2(0) + 3 = 3 \tag{3.4.23}$$

2. Intersecção com o eixo **x**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \tag{3.4.24}$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta < 0 \tag{3.4.25}$$

a equação não admite raiz rea

Conclusão: O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é sempre intersecta o eixo y no ponto (0,c), pois $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$
O valor de Δ determina o número de vezes que o gráfico intersecta o eixo x. De modo que, sendo $\Delta = b^2 + 4ac$, logo

1. $\Delta = 0 \Rightarrow$ uma raiz real dupla (o gráfico da função intersecta o eixo x em apenas um ponto)

2. $\Delta > 0 \Rightarrow$ duas raizes reais distintas(o gráfico da função intersecta o eixo x em dois pontos)

3. $\Delta = 0 \Rightarrow$ nenhuma raiz rela (o gráfico da função não intersecta o eixo x)

Exercício 3.7: Para as funções abaixo, determine as raízes (caso existam), o maior ou menor valor e esboce o gráfico.

- $x^2 - 3x + 2$
- $-4x^2 + 4x - 1$
- $x^2 - 4$

Exercício 3.8: Faça o estudo do sinal da função quadrática, usando a expressão 3.5.1

3.5 Outras Funções

Definição 3.8 (Função Modular). *Uma função modular f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada pela lei* $f(x) = |x|$ *Fazendo uso da noção de módulo de um número real, a função modular pode ser expressa como:*

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Aplicando a definição anterior temos que $|5| = 5$ e $|-3| = -(-3) = 3$. Vamos agora tomar alguns exemplos mais elaborados.

Exemplos

1. Mostre que, para todo x real,

$$|x^2| = x^2$$

Para demonstrar o resultado acima, consideremos que se $x \geq 0$, $|x| = x$ portanto $|x|^2 = x^2$. Para o caso $x < 0$ temos que $|x| = -x$ e então $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

2. Suponha que $a > 0$. Resolva a equação

$$|x| = a.$$

Como $|x| \geq 0$ e $a > 0$,

$$|x| = a \Leftrightarrow |x|^2 = a^2.$$

Mas $|x|^2 = x^2$, portanto

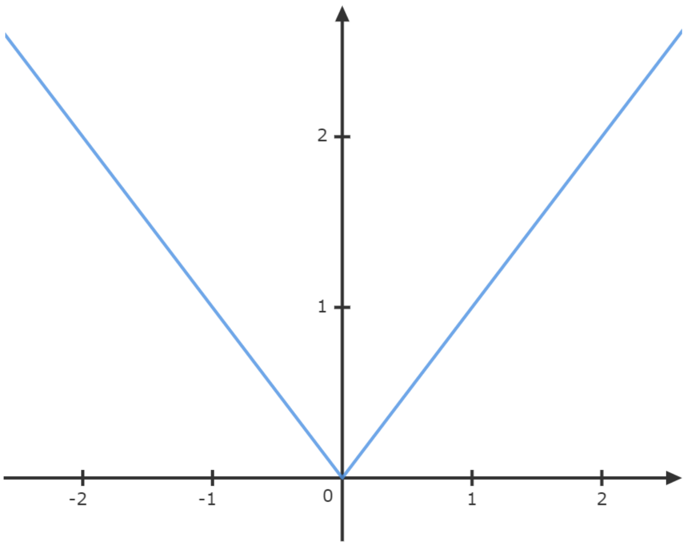
$$|x| = a \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow (x-a)(x+a) = 0 \Leftrightarrow x = aoux = -a.$$

Para a obtenção do gráfico da função modular, utiliza-se o seguinte procedimento:

1. Construímos o gráfico da função $f(x) = x$, mas só consideramos a parte em que $x \geq 0$

2. Construímos o gráfico da função $f(x) = -x$, mas só consideramos a parte em que $x < 0$

3. Reunimos os dois gráficos anteriores



O conjunto imagem da função modular é $\mathbb{R}_+$. Ou seja, a função modular assume somente valores reais não negativos.
Exercício 3.9: Resolva as seguintes equações.

- $|x| \geq 1$
- $|x - 2| < -2$

> **Definição 3.9** (Função Exponencial)**.** *Considerando um certo número real* **a**, *com $a > 0$ e $a \neq 1$. A função exponencial de base* **a** *definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, é dada por*
> $$f(x) = a^x \tag{3.5.1}$$

Considerando $a > 0, b > 0, x e y$ números reais quaisquer, então:

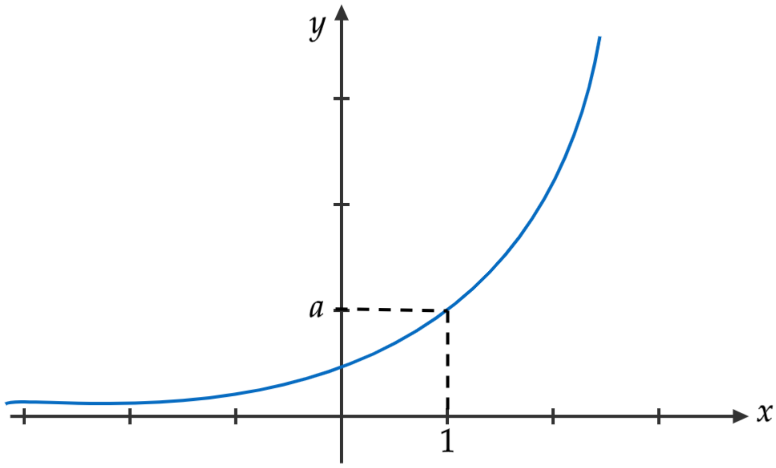
1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. Para $a > 1$ e $x > y, \Rightarrow a^x < a^y$
5. Para $0 < 0 < 1$ e $x < y$ e $x < y, \Rightarrow a^x > a^y$

Como alguns exemplos para uma função exponencial, podemos ter que:

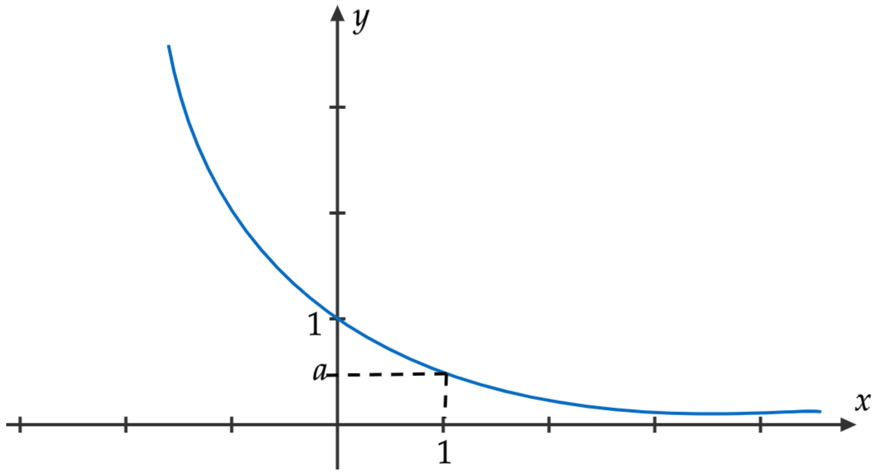
1. $f(x) = 3^x$

2. $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

Para a situação em que $a > 1$, temos o seguinte gráfico para a função exponencial.



Por outro lado, se $0 < a < 1$, então:



A importância das condições $a > 0$ e $a \neq 1$:

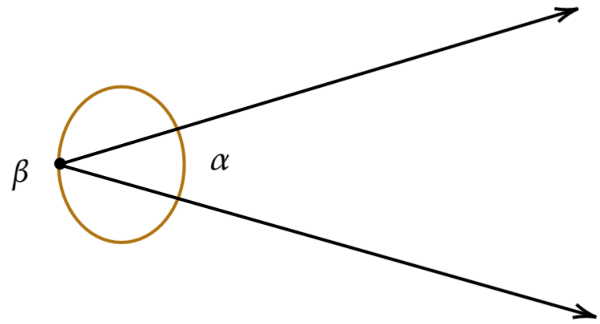
1. Caso $a = 0$ e $x < 0$, não existiria a^x. Pois para esse caso nossa função não seria definida em $\mathbb{R}$
2. Caso $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, também não existiria a^x. Pois da mesma forma, a função não seria definida em $\mathbb{R}$
3. Para a = 1 e x qualquer número real, teriamos que $a^x = 1$.

4 TRIGONOMETRIA

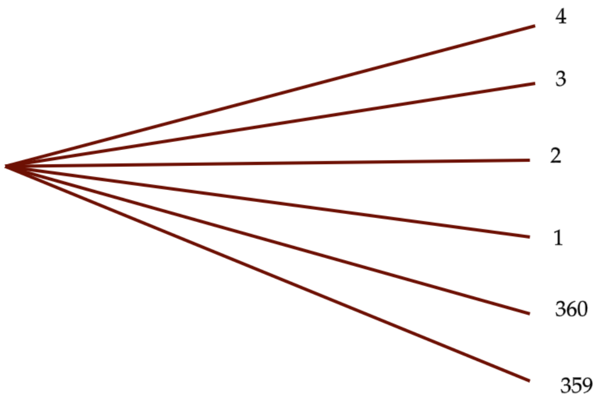
O uso da trigonometria pelos estudiosos do passado foi muito importante em diversos setores da nossa sociedade. Os egípcios, há 4000 anos, já usavam a chamada triangulação. Consistia em uma técnica utilizada para determinar distâncias. Esse procedimento fazia uso de princípios trigonométricos. Além disso, a trigonometria era uma ferramente poderosa para a Astronomia, que era bem desenvolvida na antiguidade. Acredita-se que a astronomia tenha despertado o interesse pelo o estudo e o desenvolvimento das primeiras noções de trigonometria.

4.1 Noções importantes

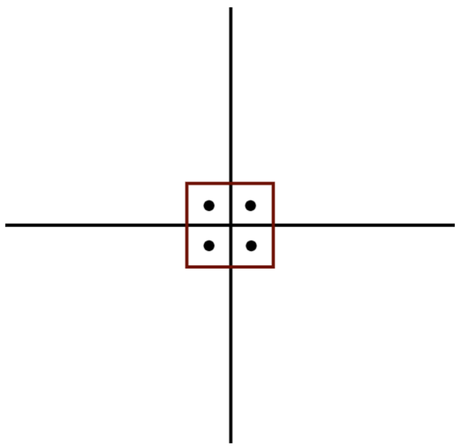
Um ângulo é uma região no plano limitada por duas semiretas com mesma origem.



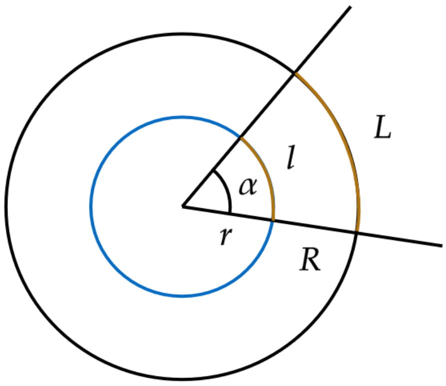
Assim, o ângulo β fica bem definido. Perceba também que a mesma definição de ângulo é válida para a região oposta e assim o ângulo β, fica também bem definido. As semiretas que definem o ângulo acima, são chamadas de lados do ângulo e a origem comum é dita vértice do ângulo.
Um grau é cada um dos ângulos obtidos quando dividimos o plano em 360 ângulos iguais com o mesmo vértice



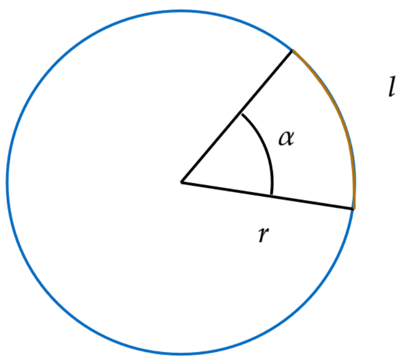
Com isso, uma volta completa forma 360 e meio volta 180.
Um ângulo reto é cada um dos ângulos obtidos quando dividimos o plano em quatro ângulos iguais com um mesmo vértice.



Com isso, o ângulo reto mede 90. Um ângulo determina sobre uma circunferência centrada no seu vértice um arco proporcional ao raio dessa circunferência.



Um radiano é um ângulo que determina sobre uma circunferência centrada no seu vértice um arco igual ao raio dessa circunferência.



Quando

$$r = l \tag{4.1.1}$$

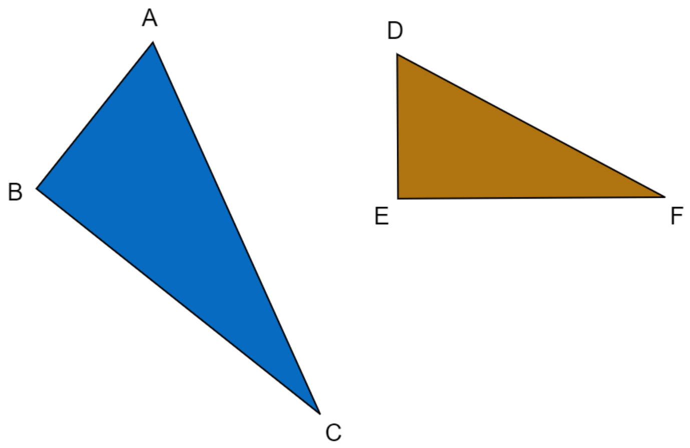
α é um radiano.
Disto, temos que se um ângulo α determina sobre uma circunferência de raio r centrada no seu vértice um arco de comprimento l então sua medida em radianos é:

$$\alpha = \frac{l}{r} \tag{4.1.2}$$

Exercício 4.1: Discuta porque a gradeza radiano é adimensional.

4.2 Triângulos semelhantes

Considere os triângulos abaixo:



Tomemos uma correspodência entre os vértices dos triângulos. Logo, associemos A com D, B com E e C com F. Logo:

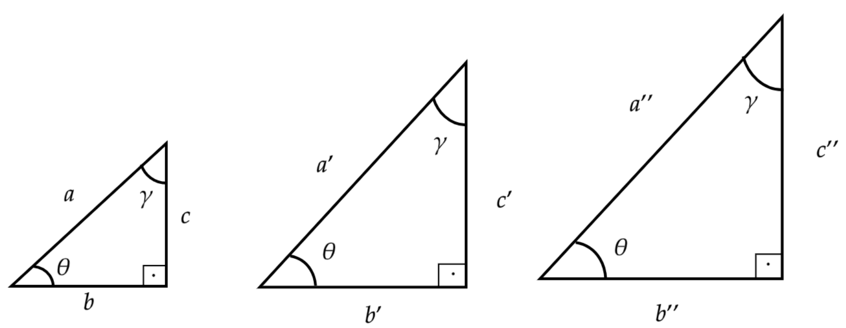
1. vértices correspondentes: A e D, B e E, G e F
2. lados correspondentes (ou homólogos): $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{CA}$ e $\overline{FD}$;
3. angulos correspondentes: e $\hat{D}$, $\hat{B}$ e $\hat{E}$, $\hat{C}$ e $\hat{F}$.

Dessa forma, fica definido que:

> **Definição 4.1** (Triângulos Semelhantes)**.** *Dois triângulos são semelhantes quando é possível estabelecer uma correspodência entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam dois a dois congruentes e os lados homólogos, proporcionais.*

4.3 Trigonometria no triângulo retângulo

Para definir as relações trigonometricas do triângulo ratângulo, Considere o seguinte desenvolvimento:
Seja os triângulos retângulos abaixo:



Pela definição de semelhança anteriormente estabelecida, tem-se que $\triangle abc \equiv \triangle a'b'c'$. Então:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \tag{4.3.1}$$

De maneira análoga, para os outros dois últimos triângulos da figura, tem-se que $\triangle a'b'c' \equiv \triangle a''b''c''$. Assim:

$$\frac{c'}{c''} = \frac{a'}{a''} \Leftrightarrow \frac{c'}{a'} = \frac{c''}{a''} \tag{4.3.2}$$

Usando o resultado em (4.2.1):

$$\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = \frac{c''}{a''} \tag{4.3.3}$$

A relação acima é uma propriedade do ângulo. Seria possível continuar de modo indeterminado tomando semelhanças para N triângulos, que a igualdade seria mantidada. De forma análoga, podíamos tomar as proporções para outros lados, assim:

$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \tag{4.3.4}$$

E agora para os outros triângulos:

$$\frac{b'}{b''} = \frac{a'}{a''} \Leftrightarrow \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''} \tag{4.3.5}$$

E assim:

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''} \tag{4.3.6}$$

Mas uma vez a discussão feita anteriormente é válida. Temos uma razão característica do ângulo. Ou seja, essa proporção se mantém independente os lados do triângulo. Visto a constância dessa proporção para N triângulos, é útil definir as seguintes relações:

$$\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = \frac{c''}{a''} = ... = cos(\theta) \tag{4.3.7}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''} = ... = sen(\theta) \tag{4.3.8}$$

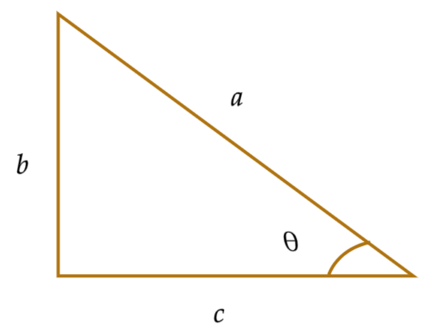
Seguindo o mesmo procedimento podemos encontrar também que:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = ... = tg(\theta) \tag{4.3.9}$$

Exercício 4.2: Visto que as relações trigonométricas são extremamente importantes em física, refaça todo o desenvolvimento anterior (sem consultar a apostila), para verificar se você entendeu bem a ideia.

4.4 Relação Fundamental

Considere o triângulo abaixo:



Pelo teorema de pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{4.4.1}$$

Dividindo a equação acima por a^2:

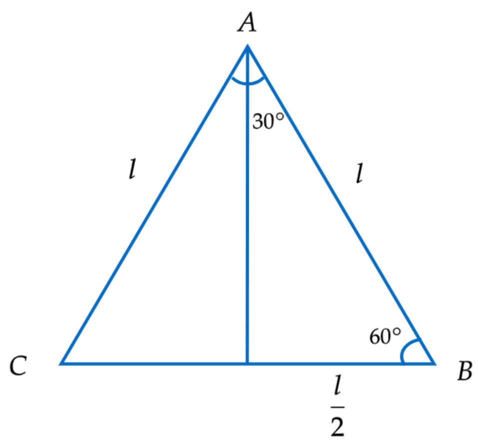
$$(\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 = 1 \tag{4.4.2}$$

Mas pelas relações de seno e cosseno para o ângulo θ, a equação acima fica:

$$cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \tag{4.4.3}$$

4.5 Ângulos Notáveis

Podemos fazer uso do triângulo equilátero abaixo para deduzirmos os valores de seno, cosseno e tangente de alguns ângulos que aparecem com mais frequência. Assim:



Para o triângulo acima, usamos o teorema de pitágoras para achar a sua altura. Então:

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \tag{4.5.1}$$

Isolando h acima:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \tag{4.5.2}$$

Assim, é possível facilmente aplicar as definições de seno e cosseno e obtemos para todos os ângulos, que:

1. $sen(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow sen(30^\circ) = \frac{1}{2}$

2. $cos(60^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

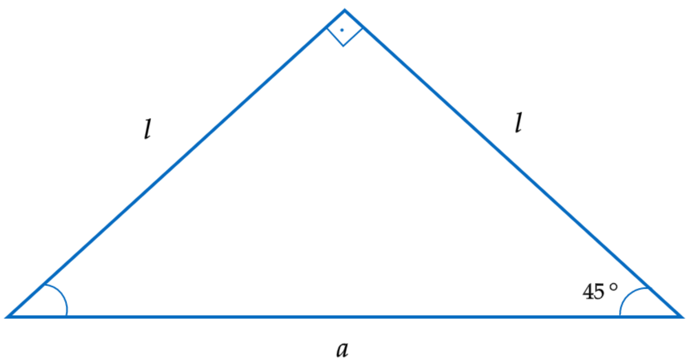
3. $cos(30^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $sen(60^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow sen(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $tan(60^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}\frac{2}{l} = \sqrt{3}$

6. $tan(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2}\frac{2}{\sqrt{3}l} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Para obter os valores dos cosseno, seno e tangente para o ângulo de 45°, consideremos o seguinte triângulo:



Fazendo o mesmo procedimento, pelo teorema de pitágoras, tem-se:

$$a^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \tag{4.5.3}$$

$$a = l\sqrt{2} \tag{4.5.4}$$

E assim

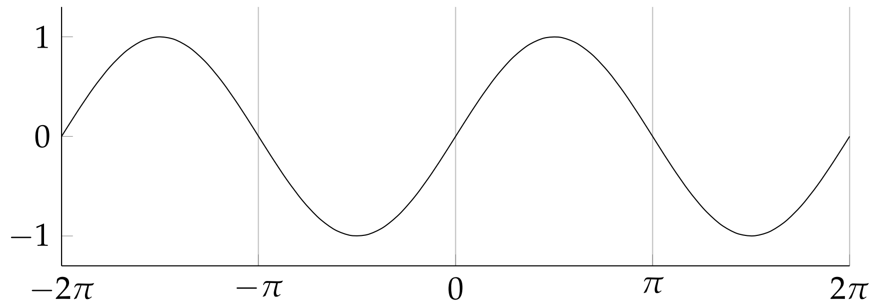
1. $sen(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{l}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $cos(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $tan(45^\circ) = \frac{sen(45^\circ}{cos(45^\circ} = 1 \Rightarrow tan(45^\circ) = 1$

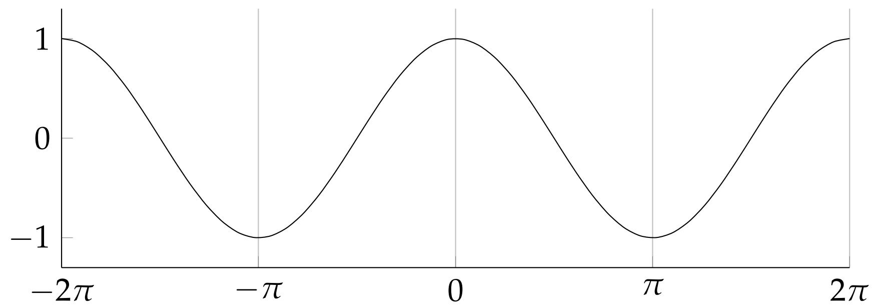
4.6 Funções Seno e Cosseno

A função seno é definda em $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ onde $x \Rightarrow sen(x)$. Ou seja, a cada x associamos o seu valor de seno.
O gráfico da função seno é expresso da seguinte forma:



A imagem da função seno é o conjunto fechado dado por $[-1, 1]$.. Seu domínio é a reta real, de modo que $D_g = \mathbb{R}$.

A função cos é definda em $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ onde $x \Rightarrow cos(x)$. Ou seja, a cada x associamos o seu valor de cosseno.
O gráfico da função seno é expresso da seguinte forma:



A imagem da função cosseno é o conjunto fechado $[-1, 1]$, como para a função seno.
Exercício 4.3: Esboce o gráfico das seguintes funções

- $f(x) = sen(2x)$
- $f(x) = cos(\frac{x}{2})$
- $f(x) = xsen(x)$
- $f(x) = |sen(x)|$

4.7 Outras Funções Trigonométricas

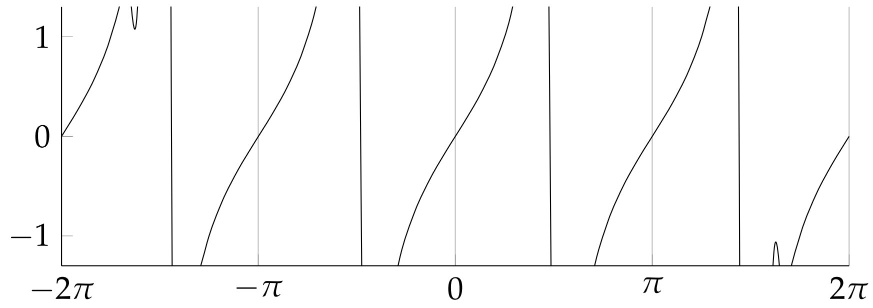
Como a tangente é dada por:

$$tg = \frac{sen}{cos} \tag{4.7.1}$$

E então, para o domínio da função tangente, temos $D_{tg} = \{x \in \mathbb{R} | cos(x) \neq 0\}$. Logo

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \tag{4.7.2}$$

$\forall$ x $\in D_{tg}$.
Para o gráfico da função tangente, temos:



A função cotangente fica definida por:

$$cotg := \frac{cos}{sen} \tag{4.7.3}$$

Assim, $D_{ctg} = \{x \in \mathbb{R} | sen(x) \neq 0\}$. Então:

$$D_{tg} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}\} \tag{4.7.4}$$

E também que:

$$D_{ctg} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi \forall k \in \mathbb{Z}\} \tag{4.7.5}$$

A secante fica definida por:

$$sec := \frac{1}{cos} \tag{4.7.6}$$

De modo que seu domínio é $D_{sec} = \{x \in \mathbb{R} | cos(x) \neq 0\}$. E assim a função secante é

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \tag{4.7.7}$$

$\forall$ x $\in D_{ctg}$

A cosecante é definida como:

$$csc := \frac{1}{sen} \tag{4.7.8}$$

Com isso o seu domínio é $D_{csc} = \{x \in \mathbb{R} | sen(x) \neq 0\}$. E assim a função é dada por:

$$csc(x) = \frac{1}{(x)} \tag{4.7.9}$$

$\forall$ x $\in D_{csc}$

Exercício 4.4: Mostre que $sec^2(x) = 1 + tg^2(x)$ para todo x tal que $cos(x) \neq 0$

Exercício 4.5: Mostre que, para todo x, com $cos(\frac{x}{2}) \neq 0$, tem-se

- $sen(x) = \dfrac{2tg(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}$
- $cos(x) = \dfrac{1 - tg^2(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}$

Parte III

Construindo Um Conhecimento Que Você Tenha Orgulho

5 Números Complexos

"Para que após a minha morte, ninguém seja capaz de entender isto."

-Niccolò Fontana Tartaglia

5.1 Por que números complexos?

Por mais contraintuitivo que pareça, números são uma invenção relativamente recente da humanidade. Independente da região em que o conceito, a ideia de números surgia como um modo de quantificar o mundo, medir terras, prever o movimento de astros e da contagem por meio do comércio. Mesmo que em lugares diferentes os símbolos da contagem tivessem nascimento com formatos diferentes, como por exemplo, na Roma antiga I, II, III, ou como na China, em que os símbolos para as trés primeiras unidades eram iguais aos romanos, porem, na horizontal. Mas por motivos óbvios números não se resumem apenas a contagem, alguns números como $\sqrt{2}$, que não é exatamente contável, acaba por surgir de um contexto de desenvolvimento da própria matemática, mas isso ainda nem chega aos passos de bebe da historia dos números.

Retrato de Luca Pacioli.

Durante os séculos XIV e XVI a matemática na Itália estava fervendo. Em 1494, Luca Pacioli(1447˜1517), professor de matemática de Leonardo Da Vinci(1452 –

1519), publica a obra *Summa de arithmetica, geometria. Proportioni et proportionalita* um guia sobre toda a matemática entendida na Itália até o periodo da renascença italiana(sec.XIV - sec.XVI), nessa mesma obra há um seção sobre a **equação cúbica**, hoje em dia conhecida e escrita da seguinte forma,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{5.1.1}$$

Uma equação mesmo que de maneiras diferentes, já era conhecida pela humanidade a pelo menos 4000 anos e que havia passado por civilizações como os Egípcios, Babilônicos, Gregos, Persas e Indianos. Pacioli pensava que uma solução para tal equação fosse impossível. Hoje em dia qualquer estudante de 8° ano já teve contato com a solução para equação de segundo grau, que não é nada menos do que a equação do terceiro grau sem o primeiro termo.

$$bx^2 + cx + d = 0 \tag{5.1.2}$$

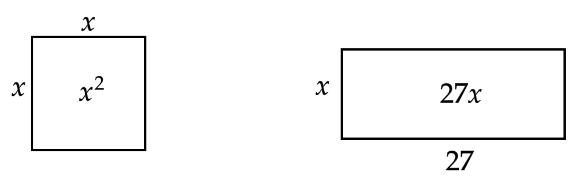
em que a devida solução é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{5.1.3}$$

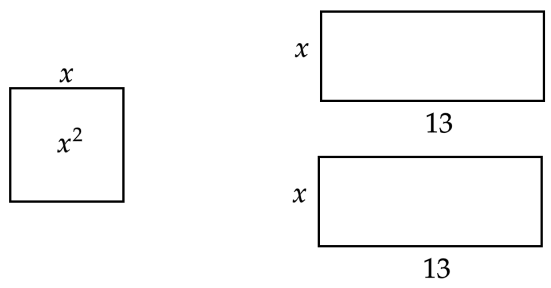
Porém essa notação com que matemática é feita hoje so foi introduzida por François Viète$(1540 - 1603)$, matemática antigamente era feita apenas com palavras e interpretações geométricas. Tome por exemplo a equação,

$$x^2 + 26x = 27 \tag{5.1.4}$$

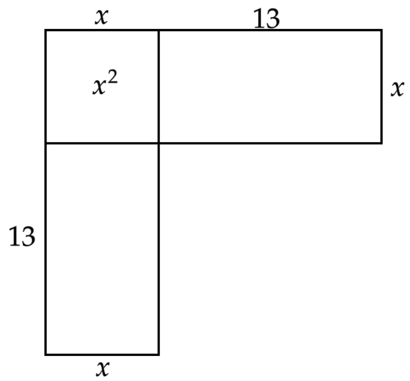
Como visto no Capitulo 2, uma interpretação geométrica para equação seria por meio da soma de áreas. x^2 seria um quadrado de lado x, $26x$ seria um retângulo de base 26 e altura x, em que a soma dessas áreas seriam iguais a uma outra de tamanho 27. Veja a figura abaixo.



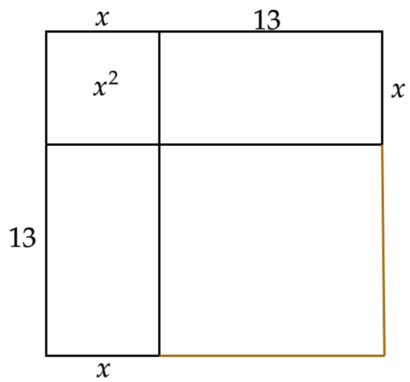
O retângulo de área $27x$ pode ser divido como a soma de outros dois retângulos de área $13x$



Reposicionando as figuras, é encontrado algo que lembra um quadrado



Com isso, o complemento do quadrado é justamente um quadrado de lado 13,



O que algebricamente é equivalente a adicionar 169 a cada lado da equação,

$$x^2 + 26x + 169 = 27 + 169 \tag{5.1.5}$$

$$\iff x^2 + 26x + 169 = 196 \tag{5.1.6}$$

Como a raiz quadrada de 196 é 14, então os lados do quadrado em questão somam em total tamanho 14, logo,

$$x + 13 = 14 \iff x = 1 \tag{5.1.7}$$

Este é um ótimo modo de resolver de se resolver uma equação quadrática, mas está longe de ser completo! Se o leitor voltar o olhar para a equação (4.1.4), $x = 1$ de fato é uma solução, porém, $x = -27$ também é! (**Verifique essa afirmação**). Por milhares de anos matemáticos se restringiram muito a realidade e por isso utilizam demasiadamente da geometria como principal ferramentas, já que eles estavam lidando com coisas no mundo real, comprimentos, áreas, volumes, até porque qual seria o significado físico de um quadrado com lado -27. Isso os fazia totalmente alheios para as soluções negativas de equações polinomiais dessa forma. Na verdade havia uma aversão tamanha a números negativos que simplesmente não havia **a equação** quadrática, e sim **seis diferentes** equações quadráticas para que os coeficientes fossem sempre positivos.

$$\begin{cases} ax^2 = bx \\ ax = c \\ ax^2 + c = bx \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 = c \\ ax^2 + bx = c \\ bx + c = ax^2 \end{cases}$$

Para equações de 3° grau não foi muito diferente. No século XI o matemático Omar Khayyam$(1048 - 1131)$ organizou 19 diferentes modos para que as equações cubicas fossem reorganizadas para que os índices positivos fossem preservados. Porém, infelizmente Omar Khayyam não se mostrou capaz de demonstrar uma solução para equações desse tipo. Alguns séculos e milhares de quilômetros depois, uma primeira solução para este problema começa a tomar forma com Scipione Del Ferro(1465˘1526), matemático italiano, encontra um método que solucionaria equações cúbicos *depressivas*, essas são aquelas nas quais o não há termo quadrático.

$$ax^3 + cx + d = 0 \tag{5.1.8}$$

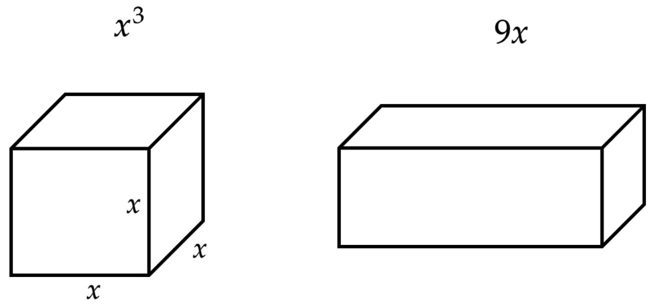
Porém assim como a comunidade matemática da época em que Del Ferro se encontrava, ele não conta a ninguém e guarda solução para si por toda sua vida. Apenas em seu leito de morte, Del Ferro conta a seu estudante Antonio Maria Del Fiore$(XV - XVI)$, que logo espalha a notícia sobre sua habilidade de resolver *cúbicas depressivas*. Quando em 12 de fevereiro de 1535, Fior desafia o matemático Niccolò Fontana Tartaglia$(1449 - 1557)$

Imagem de Niccolò Fontana Tartaglia.

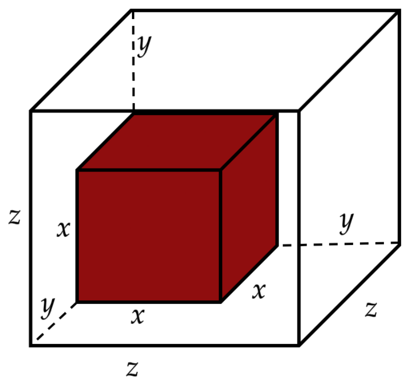
Como de costume dos desafios italianos da época, Tartaglia da a Fior uma lista de 30 problemas e Fior faz o mesmo a Tartaglia, em que todos são sobre soluções sobre *cúbicas depressivas*, cada um possui um prazo de 40 dias para resolver todos os problemas que lhes foram dados. Porém, Fior não consegue resolver um único problema, enquanto Tartaglia resolver todos os problemas dados por Fior em apenas algumas horas. Logo, Tartaglia também havia encontrado soluções para equações daquela forma. Para fazer isso, ele estende a ideia de completar quadrados discutida anteriormente para equações quadráticas, para trés dimensões. Tome o seguinte exemplo,

$$x^3 + 9x = 26 \tag{5.1.9}$$

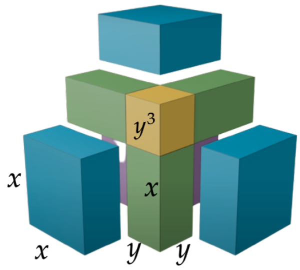
É possível pensar em x^3 como o volume de um cubo de lados x em que se adicionado um volume de $9x$, o resultado é 26.



Se tomado o cubo de volume x^3 e estendido seus lados por y, assim, é encontrado um cubo maior de lados $z = x + y$.



Com isso, o cubo original foi expandido de forma que o volume adicional pode ser decomposto em 7 novas formas volumétricas.



Tartaglia então decide reagrupar todas as formas novamente, mas desta vez em um único bloco(excluindo o cubo original de volume x^3, em que um lado tem valor de $3y$, outro z e altura, x. O que implica que seu volume seria dado por,

$$V = 3yzx \tag{5.1.10}$$

O que permite fazer a igualdade,

$$3yzx = 9x \iff 3yz = 9 \tag{5.1.11}$$

Pela equação (5.1.9) é perfeitamente plausível adicionar a ela o volume de y^3, o que permite também de acordo com as relações do capitulo 02, chegar ao seguinte,

$$x^3 + 9x + y^3 = 26 + y^3 \tag{5.1.12}$$

$$z^3 = 26 + y^3 \tag{5.1.13}$$

O que leva ao sistema,

$$\begin{cases} z^3 = 26 + y^3 \\ 3yz = 9 \end{cases} \tag{5.1.14}$$

$$\implies z = \frac{3}{y} \iff y^3 + 26 = \frac{27}{y^3} \tag{5.1.15}$$

$$y^6 + 26y^3 = 27 \tag{5.1.16}$$

A uma primeira vista, parece que o problema foi se tornou desnecessariamente mais complicado, porém, se o leitar pensar na equação (5.1.16) e no termo y^3 como uma nova variável, o problema se trata simplesmente de uma equação quadrática.

$$(y^3)^2 + 26y^3 = 27 \tag{5.1.17}$$

Assim retornando ao mesmo problema de completar quadrados anteriormente resolvido no exemplo da equação (5.1.4), em que resolvendo, $y = 1 \implies z = 3 \implies x = 2$. Tartaglia não escreve o algorítimo para resolver tais equações da forma que é conhecida hoje, mas sim como um poema.

Quando o cubo tem coisas anexas
Se ele se iguala a algum número discreto
Dois outros diferentes são encontrados nele
Então você terá isso como costume
Que o produto deles sempre seja igual
Ao terceiro cubo das coisas puro,
O resto geral
De seus lados cúbicos bem subtraídos
Será sua coisa principal.
No segundo destes
Quando o cubo ficar sozinho
Você observará esses outros contratos,
Você fará duas partes desse número
De tal forma que uma se produza na outra diretamente
O terceiro cubo das coisas em linha reta
Dessas, então, por convenção comum
Você terá os lados cúbicos juntos
E tal soma será sua idéia.
O terceiro então de nossos cálculos
Se resolvido com o segundo, se você olhar bem
Que por natureza são quase juntos.
Esses foram encontrados, não com passos lentos
Em 1500 e quarenta e três
Com fundamentos bem firmes e corajosos
Na cidade à beira-mar.

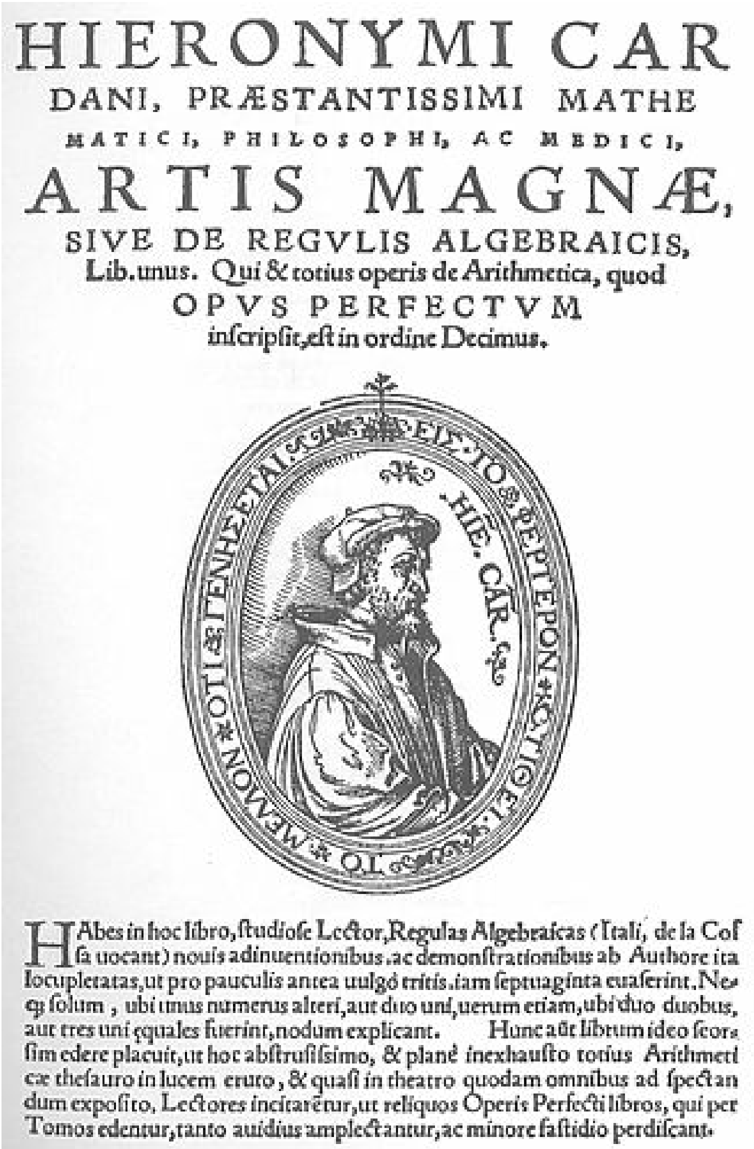
Mas o caso geral de equações cubicas ainda não havia sido resolvido, e matemáticos de toda Itália estão sedentos de curiosidade pela solução de Tartaglia, especialmente Gerolamo Cardano$(1501 - 1576)$. Até que Tartaglia conta a Cardano seu metódo, porém sob um juramente de que Cardano jamais contaria a ninguém, não publicaria em nenhum lugar e nunca escrever sobre, a não ser que fosse em cifras.

Mas Cardona era ambicioso, e tinha como principal objetivo encontrar a solução para a equação cúbica completa, o que ele de fato, acaba realizando. Se na equação (5.1.1) x for substituído por $x - \dfrac{b}{3a}$, então todos os termos quadráticos se cancelam, transformando assim, qualquer equação cúbica completa, em uma *equação cúbica depressiva*.

$$ax^3 - \frac{2bx^2}{3} + \frac{b^2x}{9} - \frac{bx^2}{3} + \frac{2b^2x}{3} - \frac{b^3}{27a} + bx^2 - \frac{2b^2x}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + ... = 0 \qquad (5.1.18)$$

$$ax^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} = 0 \qquad (5.1.19)$$

Mas infelizmente Cardano fez um juramento solene de que jamais publicaria a descoberta sobre *cúbicas depressivas* de Tartaglia. Porém em 1532 Cardano conhece um matemático, que por acaso, era o afilhado de Scipione Del Ferro, aquele que antes de sua morte deu suas soluções para Antonio Fior. Assim, Cardano encontra as soluções no antigo caderno de Del Ferro, o que já condizia com a solução de Tartaglia por décadas antes. Então agora, Cardano pode publicar uma solução completa para equações cúbicas sem prejudicar seu jurado a Tartaglia. Anos depois Cardano publica "*Ars Magnae - The Great Art*".



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Ars Magnae publicado por Cardano.

Porém houveram problemas. Enquanto Cardano escrevia *Ars Magnae*, ele acabou por se deparar com equações que não poderiam ser resolvidas no modo usual, como por exemplo,

$$x^3 = 15x + 4 \tag{5.1.20}$$

Colocando a equação (5.1.20), tem-se como resultado uma solução que retorna a raiz quadrada de números negativos.

$$\sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} \tag{5.1.21}$$

$$\implies \sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{4^2}{4}-\frac{15^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{4}{2}-\sqrt{\frac{4^2}{4}-\frac{15^3}{27}}} \tag{5.1.22}$$

$$\iff \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \tag{5.1.23}$$

Cardano e Tartaglia juntos revisam todo o problema para verificar o que havia de errado, já que raízes eram definidas apenas para números maiores que zero. Voltando a todo o pensamento geométrico tridimensional, tudo funcionava perfeitamente, porém quando trabalhado o passo seguinte em termos de quadrados, um suposto paradoxo geométrico surgia. Cardano encontra parte de um quadrado que deve ter areá igual a 30, mas ao mesmo tempo, lados de tamanho 5, como isso implicaria que o quadrado teria areá completa de 25, logo para completar os quadrados seria necessário adicionar uma areá negativa de -5(???). Essa não seria nem a primeira e nem a ultima vez que raízes de números negativos apareceriam na matemática. Em *Ars Magnae*, Cardano lista o seguinte problema.

Ache dois números que quando somados resultam em 10 e quando multiplicados, 40. Combinando estas equações na equação quadrática,

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=40 \end{cases} \tag{5.1.24}$$

$$y=10-x \implies x(10-x)=40 \iff x^2+40=10x \tag{5.1.25}$$

Porém se colocado na solução da equação do 2° grau, as soluções possuem raízes quadradas de números negativos.

$$x=\frac{-(10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 10}}{2} \iff x=5\pm\sqrt{-15} \tag{5.1.26}$$

Matemáticos começaram a entender que sempre que uma raiz negativa viesse a aparecer, significaria que existe solução para tal equação. Porem, especificamente, por exemplo, para a equação (5.1.20), $x=4$ é uma solução.

$$4^3=15\cdot 4+4 \iff 64=64 \tag{5.1.27}$$

Mas como Cardano não sabia como responder porque para essa equação ainda havia uma solução real, ele simplesmente evita falar de tal problema em um sua obra. Mais tarde, o engenheiro italiano Rafael Bombelli$(1526-1572)$ inicia de onde Cardano parou. Abismado pela geometria impossível que estes números implicariam, ele acaba por achar um caminho pelo meio de tanta bagunça. Ele acaba por deixar que raízes de números negativos sejam uma especie de novo número. Bombelli assume que os dois termos nas soluções de Cardano podem ser expressos como uma combinação, de um numero usual, com essa nova especie de número.

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \tag{5.1.28}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1} \end{cases} \tag{5.1.29}$$

Agora, envolvendo a raiz quadrada de -1, Bombelli descobre que que as duas raízes cúbicas nas equações de Cardano são equivalentes a duas, $\pm\sqrt{-1}$.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} \end{cases} \tag{5.1.30}$$

Tomando o passo final e somando ambas as soluções,

$$2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 \tag{5.1.31}$$

que era exatamente o resultado esperado. Nos seculos sub seguintes, a matemática moderna começa a tomar forma. Nos anos 1600, François Viète$(1540 - 1603)$ introduz toda a notação moderna que é usada para a álgebra, encerrando assim, um ciclo de que resolver problemas de matemática significava desenhar figuras e fazer descrições por meio de palavras. Anos depois, René Descartes$(1596\breve{}1650)$ faz amplo uso dos números com raízes negativas, chamando-os de *imaginários*, motivo este que fez com que Leonard Euler$(1707 - 1783)$ introduz a unidade destes números como i tal que $i = \sqrt{-1}$. Quando então combinados com os números usualmente conhecidos como reais, eles formariam os *números complexos*. Números complexos então, são necessários porque sem eles a álgebra matemática estaria incompleta, já que pelo teorema fundamental da álgebra[6] para toda equação quadrática, sempre devem existir duas soluções. Mas antes de adentrar na matemática propriamente dita, se você ainda não percebeu, números complexos não existem na natureza, ate porque ninguém consegue medir uma porta com $180i$ cm de altura. Por que utilizados de alguma forma na descrição de sistemas físicos? Como você vera ao longo da carreira, eles podem ser utilizados para descrever movimentos periódicos, radiação eletromagnética e mecânica quântica, por exemplo.

5.2 Definindo Números Complexos e Propriedades

Antes de tudo é necessária a introdução da ideia do que é par ordenado de maneira mais formal. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, então o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, é definido como,

Definição 5.1 (Conjunto dos Pares Ordenados Reais.)**.**

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Em que (x, y) são os chamados pares ordenados, i.e, o conjunto de elementos que constituem o espaço bidimensional dos reais, definido. Com isso, se torna possível definir o conjunto dos números complexos.

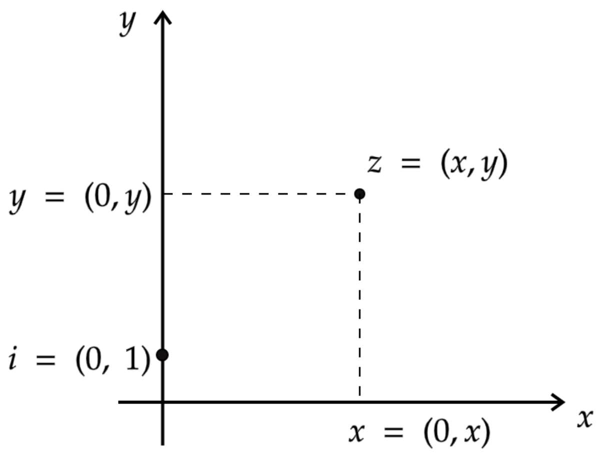
[6]Se não souber o que enuncia o teorema fundamental da álgebra, não se preocupe, não é o foco da discussão, é suficiente que você saiba o que foi dito em seguida, pode servir como uma provocação a sua curiosidade, sinta-se a vontade para pesquisar sobre.

Definição 5.2 (Conjunto dos Números Complexos.)**.**

$$\mathbb{C} := \left\{ z \in \mathbb{C} \iff z = (x, y) \middle| z = x + iy \; \forall x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Note pela definição acima do conjunto dos complexos que $\mathbb{R}$ consequentemente é um subconjunto de $\mathbb{C}$, ou matematicamente, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Essa é a noção básica que deve-se ter no que se diz respeito aos complexos. Geometricamente, isso quer dizer,



Representação em coordenadas dos números complexos no plano de Argan-Gauss.

Veja então que a representação em coordenadas de $z = x + iy$, implica que cada termo funciona como uma componente do plano de Argan-Gauss, componentes essas que recebem o nome de partes reais e imaginaria, respectivamente, tal que $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$.

Exercício 5.1:

Com a representação dos números complexos no plano de Argan-Gauss reflita o seguinte. Quando multiplicado $i \cdot z$, isso resulta em, $i \cdot z = -y + ix$, mostre as consequências geométricas disso no plano de Argan-Gauss. Isso equivale a rotacionar a posição de z em quantos graus?

Exercício 5.2:

No plano de Argan-Gauss acima, o numero imaginário i, esta escrito como $i = (0, 1)$. Sabendo que o eixo y corresponde ao eixo imaginário e o eixo x ao eixo real, o que significa i estar representado dessa forma? o que acontece geometricamente se você fizer $i \cdot i$?

Existe uma propriedade em particular dos números complexos, que é a existência de seu conjugado, mas por termos de praticidade, devemos definir o conjunto complexo conjugado, e assim os números complexos conjugados virão como consequência. Veja:

Definição 5.3 (Conjunto Conjugado dos Números Complexos.)**.**

$$\mathbb{C}^* := \left\{ z^* \in \mathbb{C}^* \iff z^* = (x, -y) \middle| z = x - iy \; \forall x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

A partir disso, note então que podem ser estabelecidas as seguintes relações,

$$z + z^* = 2\mathrm{Re}(z) \tag{5.2.1}$$

$$z - z^* = 2i\mathrm{Im}(z) \tag{5.2.2}$$

$$z = z^* \iff z \in \mathbb{R} \tag{5.2.3}$$

Exercício 5.3:

Dadas as três equações acima e definição do conjunto complexo conjugado, demonstre as três equações acima.

Exercício 5.4:

Desenhe a forma geométrica de z^* e compare com z, qual a relação geométrica que um tem com o outro?

Exercício 5.5:

Faça para z^* o mesmo que foi feito no exercício 5.1.

Exercício 5.6:

Faça para z^* o mesmo que foi feito no exercício 5.2.

É possível agora, assim como já foi feito para números reais, definir o modulo de números complexos.

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \iff |z|^2 = x^2 + y^2 \tag{5.2.4}$$

De forma que agora, finalmente as propriedades algébricas podem ser estabelecidas.[7]

Propriedades Algébricas:

i . *Soma*: $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

ii . *Subtração*: $z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$

iii . *Produto*: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$

iv . *Divisão*: $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{x_2 x_1 + y_2 y_1 + i(y_2 x_1 - x_2 y_1)}{x_1^2 + y_1^2}$

Exercício 5.7:

Demonstre passo a passo, a propriedade algébrica da divisão apresentada.

Exercício 5.8:

Sejam $z_1 = 8 + 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$. Calcule o resultado de cada uma das propriedades algébricas para estes dois números.

5.3 Unidade Imaginária

É chamado de unidade imaginaria, o número i, em que como já é de conhecimento, $i = \sqrt{-1}$. Isso implica então que uma propriedade direta é que,

[7]Algumas dessas propriedades algébricas podem ser um tanto quanto feias, o objetivo não é que você memorize e decore todas elas, mas que aprenda a manipula-las corretamente.

$$i^2 = -1 \quad (5.3.1)$$

o que imediadamente, implica também que $i^2 \cdot i = i^3 = -i$; $i^3 \cdot i = i^4 = 1$; $i^4 \cdot i = i^5 = -i$ e assim por diante. Um padrão pode então ser percebido para qualquer n-ésima potencia através dessa iteração, com $n \in \mathbb{N}$ [8]

$$i^n = \begin{cases} -1 & ; n \text{ é par} \\ -i & ; n \text{ é impar} \end{cases} \quad (5.3.2)$$

E consequentemente, de forma geral, também $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$i^{4n} = 1 \quad (5.3.3)$$

$$i^{4n+1} = i \quad (5.3.4)$$

$$i^{4n+2} = -1 \quad (5.3.5)$$

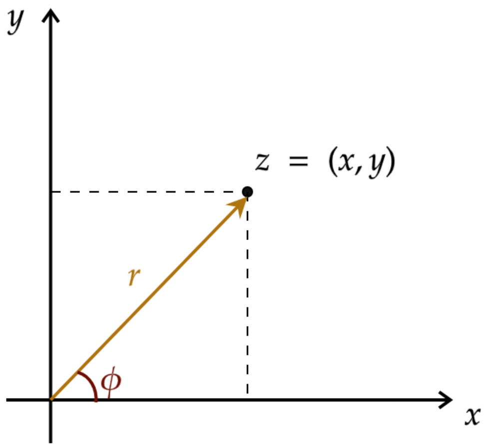
$$i^{4n+2} = -i \quad (5.3.6)$$

Exercício 5.9:

Demonstre as equações 5.3.3 a 5.3.6.

5.4 Forma polar

Devido ao fato de números complexos possuírem uma interpretação direta como pontos em $\mathbb{R}^2$, e consequentemente, vetores partindo da origem até um ponto em particular, é possível escreve-los por uma mudança de coordenadas, cada ponto em função de (r, ϕ), através dessa mudança de coordenadas[9], os números complexos ficam na sua conhecida **forma polar**.



Representação em coordenadas polares dos números complexos no plano de Argan-Gauss.

[8]Note que aqui estou utilizando da definição dos naturais em que o numero 0, não faz parte do conjunto.

[9]Isso significa apenas que mudamos as variáveis para descrever nosso sistema, que nesse caso é apenas um sistema matemático, antes a descrição era feita em termos de (x, y) e agora em (r, ϕ), frequentemente mudanças de coordenadas são feitas na física para facilitar a descrição do problema.

Em que pode ser verificado facilmente que $r^2 = x^2 + y^2$, i.e, $r > 0 \ \ \forall z = x + iy \neq 0$; $\cos\phi = \dfrac{x}{r}$; $\sin\phi = \dfrac{y}{r}$, logo,

$$z = x + iy = r\cos\phi + ir\sin\phi = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{5.4.1}$$

O ângulo ϕ é chamado de argumento do número complexo z e o raio r é equivalente ao modulo do numero complexo em questão, ou seja, $r \equiv |z|$.

Uma consequência, que infelizmente, pela falta de ferramentas matemáticas[10], ainda não pode ser provado aqui, é que dado qualquer número complexo na sua forma polar, $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ e também e sendo o numero de Euler, com isso,

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \implies z = re^{i\phi} \tag{5.4.2}$$

Isso permite mostrar rapidamente uma relação conhecida na matemática como **identidade de Euler**. Se por acaso, $\phi = \pi$, então $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, logo,

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{5.4.3}$$

Vale notar que o complexo conjugado de um numero complexo na forma polar, é $z = re^{i\phi} \iff z^* = re^{-i\phi}$

Exercício 5.10:

Explicite como ficam as propriedades algébricas dos números complexos em sua forma polar.

O motivo da escrita na forma polar é que operações como a potenciação e por consequência, radiação se tornam mais simples quando dada a formula de Moivre. Eis o enunciado dos teoremas de de Moivre.

Teorema 5.1 (Primeiro Teorema de Moivre). *Dado um numero complexo $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$ e um numero n, t.q, $n \in \mathbb{Z}$, então,*

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

Teorema 5.2 (Segundo Teorema de Moivre). *Dado um numero complexo $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ e um numero $n \geq 2$, t.q, $n \in \mathbb{N}$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Em que $\sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}$

Vamos então calcular as raízes cubicas[11] de $z = -1$. Eu sei o que deve estar passando na sua cabeça "Raiz cubica de -1??? Obviamente é -1". E sim, você esta certo, porem não é a única. Prosseguindo aos cálculos, $r = 1$ e $\phi = \pi$, por se tratarem de raízes cubicas, $k = \{0, 1, 2\}$, assim, pelo segundo teorema de Moivre:

[10] Encorajo fortemente você a pesquisar quais ferramentas estão por trás dessa demonstração, como um estudante de inicio de graduação, não demorara muito ate que você tenha todo o ferramental necessário.

[11] Uma pergunta equivalente seria, qual numero multiplicado por si mesmo trés vezes, é igual a -1

$$z = \cos\pi + i\sin\pi \tag{5.4.4}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} k = 0 \Longrightarrow z_0 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ k = 1 \Longrightarrow z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\ \\ k = 2 \Longrightarrow z_2 = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \tag{5.4.5}$$

Outro exemplo seria determinar as raízes quartas de $z = -8 + 8i\sqrt{3}$. Diretamente, $r = 16$, $\phi = \dfrac{2\pi}{3}$. Pelo segundo teorema de de Moivre para as raízes quartas, $k = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\Longrightarrow z_k = 2\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\Big)\Big] \tag{5.4.6}$$

$$\therefore \begin{cases} k = 0 \Longrightarrow z_0 = 2(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i \\ \\ k = 1 \Longrightarrow z_1 = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}) = -1 + i\sqrt{3} \\ \\ k = 2 \Longrightarrow z_2 = 2(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i \\ \\ k = 3 \Longrightarrow z_3 = 2(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3} \end{cases} \tag{5.4.7}$$

Exercício 5.11:
Interprete geometricamente no plano de Argan-Gauss o resultado dos exemplos acima.

Exercício 5.12:
Dado $z = -1 + i\sqrt{3}$, calcule z^{100}.

Exercício 5.13:
Calcule $\sqrt[3]{-64}$.

5.5 Funções Seno e Cosseno Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são os análogos complexos das funções trigonométricas usuais conhecidas ate então. De grande uso para a física, podem ser utilizadas para modelagem do potencial eletrostático, para movimentos amortecidos e como de se esperar, a lista não acaba, elas acabarão dando as caras com certa regularidade.

As duas funções hiperbólicas fundamentais são, $\cosh\phi$ e $\sinh\phi$. Mas antes de defini-las propriamente, é necessário redefinir as funções seno e cosseno. Pela formula de Euler, $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$, e seu complexo conjugado, $e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$. Somando e subtraindo ambos,

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \tag{5.5.1}$$

$$\sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \tag{5.5.2}$$

Veja então, que se por acaso, $\phi = i\theta$, consequentemente,

$$\cos(i\theta) = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} \tag{5.5.3}$$

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} \tag{5.5.4}$$

Permitindo definir as o seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico, que são,

Definição 5.4 (Seno e Cosseno Hiperbólicos)**.**

$$\cosh\theta := \cos(i\theta)$$

$$\sinh\theta := \frac{\sin(i\theta)}{i}$$

$\forall\theta \in \mathbb{R}$.

Tal que a relação fundamental agora é, $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$.

Exercício 5.14:
Sabendo que essas funções são análogas as trigonométricas usuais, encontre como são definidos, $\tanh\theta$, $\operatorname{sech}\theta$, $\operatorname{csch}\theta$, $\coth\theta$, em termos das exponenciais.

Exercício 5.15:
Estabeleça em detalhes a relação fundamental e suas derivações em termos das outras funções hiperbólicas.

6 Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

"Jovem, na matemática você não entende as coisas. Você se acostuma com elas."
- John Von Neumann.

6.1 Um Pouco de História

Os problemas centrais por trás do cálculo são:

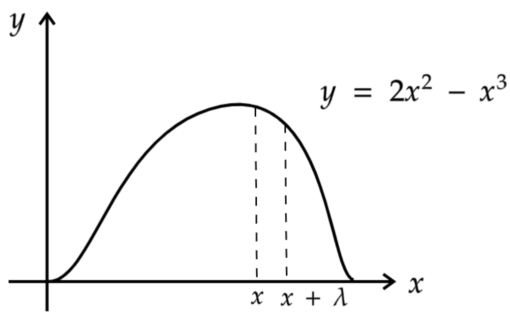
1. Encontrar a inclinação da reta tangente(gradiente) em qualquer ponto de uma curva qualquer.
2. Encontrar a área abaixo de uma curva qualquer.

A solução destes problemas foi inventada na Europa no século XVII, envolveu matemáticos da França, Inglaterra e Alemanha. Pierre de Fermat$(1607-1665)$, Isaac Newton$(1643-1727)$, Göttfried Leibniz$(1646-1716)$, todos os três tiveram um papel importante na sua criação[12] inicial.

Em 1629, assim como Descartes, Pierre de Fermat aplicou Geometria Analítica para encontrar pontos de máximo e mínimo das curvas.

Pontos de máximo e mínimo de duas curvas.

Fermat apresentou um algoritmo, sem alguma justificativa,[13] para encontrar máximos e mínimos. Um dos exemplos utilizados por Fermat para mostrar este algoritmo, foi o seguinte: Tomando a curva $y = 2x^2 - x^3$ dentro de um determinado intervalo positivo.



[12]Note que foi colocado criação, e não descoberta do calculo. Isso porque existem fortes debates filosóficos sobre se a matemática foi criada ou descoberta.

[13]Isso significa que houve a utilização de nenhum teorema, corolário ou identidades conhecidas.

Assumindo que x seja um ponto de máximo da curva y, então tomando um ponto muito próximo a x, $x + \lambda$ por exemplo, então $y(X) \approx y(x + \lambda)$.

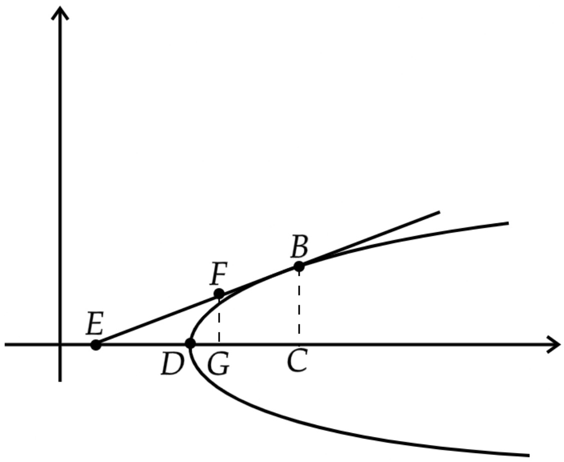
$$\Longrightarrow 2(x+\lambda)^2 - (x+\lambda)^3 = 2x^2 - x^3 \iff 4x\lambda + 2\lambda^2 - 3x^3\lambda - 3x\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \tag{6.1.1}$$

Pelo fato de λ ser um numero muito pequeno, qualquer potencia de λ sera menor ainda! ou seja, os termos com λ, λ^2, λ^3 vão a zero.

$$\Longrightarrow 4x - 3x^2 = 0 \iff x = \frac{4}{3} \tag{6.1.2}$$

Logo, pelo método de Fermat, ha um ponto de máximo em $x = \dfrac{4}{3}$.

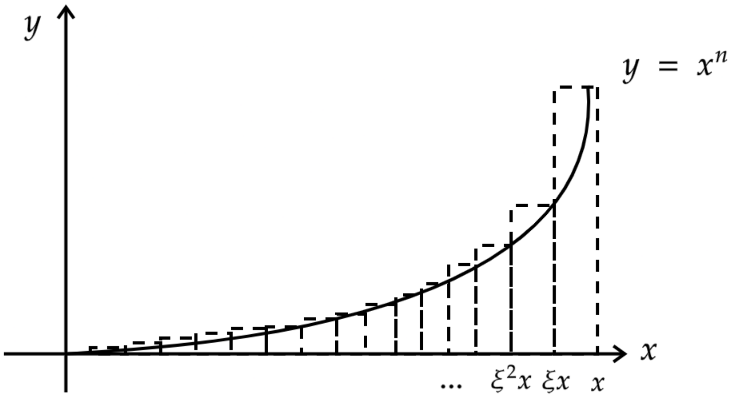
Isto o ajudou nos problemas subsequentes. Para encontrar retas tangentes, Fermat considera o seguinte:



Fermat então construiu esse diagrama para conseguir calcular uma tangente[14] a parábola no ponto B. De acordo com a geometria Euclidiana, para que se construa retas é necessário um segundo ponto. Por isso, Fermat busca a intersecção do ponto E com o eixo horizontal. Isso implica diretamente na necessidade de encontrar o comprimento $\overline{EC}$. Para isso, considerando um segundo ponto na tangente, o ponto F, que é bem próximo de B, mas também é bem próximo da parábola. Assim, novamente se torna possível adequar os valores de y e aplicar o mesmo algoritmo descrito anteriormente para encontrar a inclinação da reta tangente.

Restando então ao que diz respeito do problema da área, sob os métodos de Fermat. Tomando como exemplo, assim como Fermat, a $y = x^n$ dentro de um intervalo positivo.

[14]Em geral, neste ultimo capitulo, quando estiver escrito tangente, entenda como inclinação da reta tangente.

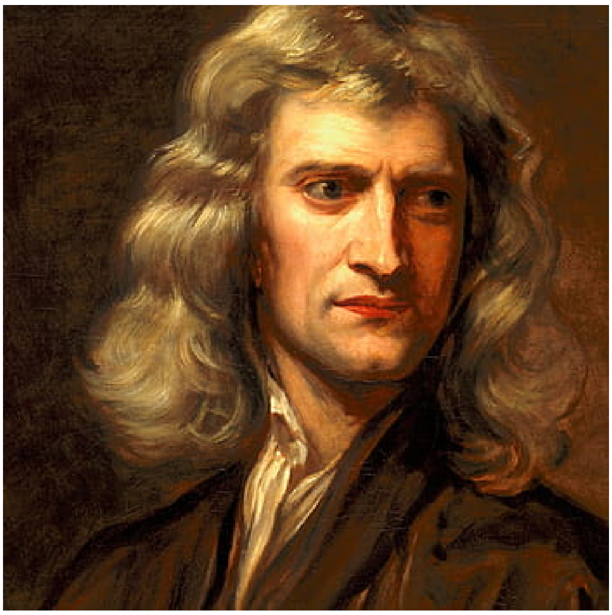


Fermat divide o eixo x por um determinado numero de pontos proporcionais a potencias de numero ξ, t.q, $\xi \in (0, 1]$. Assim, ele constrói retângulos sobre os pontos, x, ξx, e assim por diante. De forma que se torna possível calcular as áreas desses retângulos.

A soma das áreas destes retângulos formam o que na matemática é usualmente chamado de sequencia, neste caso, uma sequencia geométrica infinita[15]. Tomando então $\xi = 1$, resulta que todos os retângulos são infinitamente finos, de forma que a sequencia mencionada se torna igual a, $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.[16]

Fermat enviou seus resultados para Marin Mersenne$(1588 - 1648)$, que divulgou os resultados entre a comunidade matemática. Descartes os criticou bastante, mas acabou aceitando os métodos de Fermat. Estes mesmos resultados também foram enviados por Fermat a John Wallis$(1616 - 1703)$, matemático inglês que em 1665 escreveu a obra *Arithmetica Infinitorium*, em que havia a formula para a área sob a curva de $y = x^n$ e também inventou o simbolo do infinito(∞) usado ate hoje.

Essa obra de Wallis influenciou muitos matemáticos da época, em especial, Isaac Newton.



[15]Um exemplo de sequencia geométrica que você pode conhecer, é a progressão geométrica. Uma sequencia ser infinita significa apenas que ela possui infinitos termos.

[16]O fato de Fermat ter conseguido fazer isso sem inventar nenhuma matemática nova, como fizeram Newton e Leibniz é surpreendente, pois como você vera mais adiante nesse capitulo, essa é exatamente a integral de uma função polinomial de grau n.

Newton retratado por Godfrey Kneller, 1689

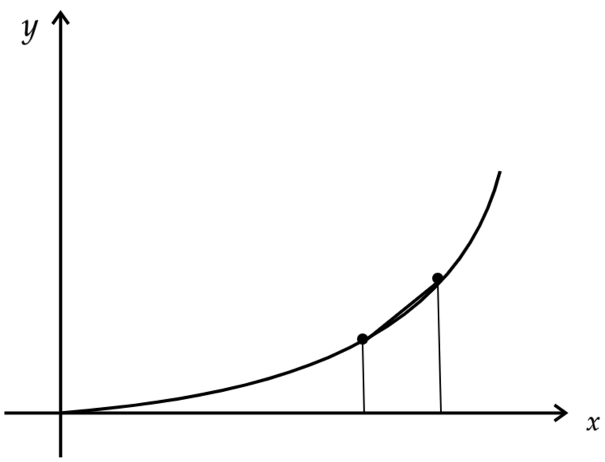
Isaac Newton nasceu em 1643, uma década depois de Fermat descobrir a encontrar áreas e tangentes. De 1665 a 1666, foi a época da grande praga na Inglaterra, o que forcou Newton a voltar para sua casa em Lincolshire, o que acabou sendo um de seus períodos mais produtivos. Foi durante este período que ele fez avanços sobre o teorema binominal[17]. Através do teorema binomial, Newton conseguiu investigar áreas abaixo de curvas, por exemplo, a curva $y = x^{\frac{1}{2}}\ \forall x \in [0, x]$, a área neste intervalo, seria $A = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ e com isso ele conseguiu encontrar a taxa de variação da área da curva, que neste caso, a taxa de variação da área em x, era exatamente igual a altura da curva original.

Com isso, Newton descobriu como relacionar o problema da tangente com o problema das áreas sob curvas. Isto é o que viria a ser, o **Teorema Fundamental do Cálculo**.

Mas infelizmente a escrita de Newton em suas publicações estava de cheia de conceitos difíceis e uma notação muito carregada.

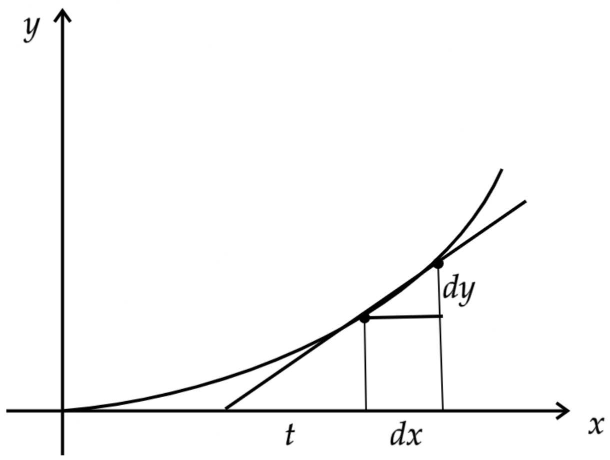
Uma versão mais clara então dessas ideias surgiu em outro lugar da Europa, mais especificamente, na Alemanha. Göttfried Leibniz foi estudar na Universidade de Leifzig em 1661. Era talentoso em muitas áreas, como filosofia, teologia, línguas, direito, e especialmente, matemática. Porem Leibniz acabou por se tornar diplomata. Em uma de suas missões diplomáticas a Paris em 1672, acabou conhecendo um famoso físico da época, Christian Huygens$(1629 - 1695)$, e estava ansioso por aprender mais matemática com Huygens. Huygens então recomendou estudar as obras de outros matemáticos, como Blaise Pascal$(1623 - 1662)$. Tres anos depois, em 1675, Leibniz desenvolveu seu próprio método para determinar a tangente as curvas.

Leibniz considerou toda linha curva como um polígono com infinitos lados que são infinitamente pequenos.



Tomando estes dois pontos conectados por um segmento de reta, em que este segmento de reta é infinitamente pequeno. A partir disso é possível então determinar a tangente. A tangente pode ser visualizada como uma extensão deste mesmo segmento infinitamente pequeno.

[17]O teorema binomial sera citado algumas vezes ao longo deste capitulo e ate mesmo utilizado mais adiante, então sinta-se livre para pesquisar de antemão caso tenha interesse.

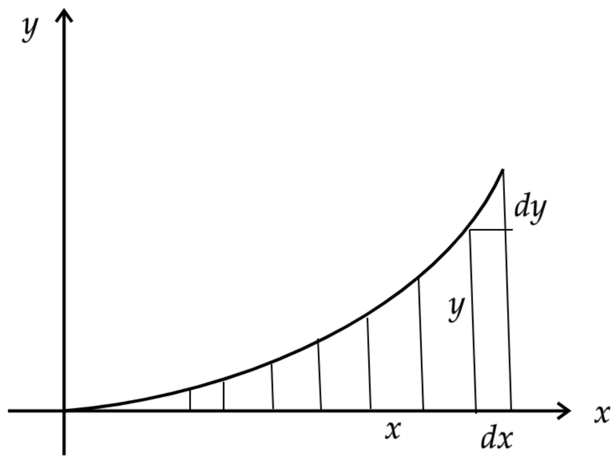


Assim, Leibniz chama o segmento na reta horizontal que vai do ponto em que a reta tangente intersecta o eixo x ate o primeiro ponto explicito na curva, de t. De forma que a pequena variação destes dois pontos em relação a x, é a diferença dx e a pequena variação destes dois pontos em relação a y, é a diferença, dy. Então por semelhança de triângulos, a inclinação da tangente é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t} \tag{6.1.3}$$

Restando a Leibniz apenas solucionar o problema da área.

Para a área abaixo da curva, Leibniz aplicou o mesmo modelo retilíneo.



Ha uma infinita quantidade de pontos presentes na curva. Tomando z indicando a área sobre a curva inteira, Leibniz então calcula o diferencial, a diferença de z. Porem ao fazer isso, o triangulo superior é negligenciado. Porém é possível mostrar que o triangulo é infinitamente menor que o retângulo. A diferencial de z é entao,

$$dz = ydx \tag{6.1.4}$$

Porem note que essa variação na área representa apenas o retângulo de base dx, para calcular a área completa abaixo da curva então, Leibniz soma todos os $'dz'$, o resultado sendo denotado por,

$$z = \int ydx \tag{6.1.5}$$

O que também uma formulação inicial do **Teorema Fundamental do Cálculo**. Este simbolo na equação acima, como se fosse um S esticado foi inventado por Leibniz para indicar o processo de somar áreas, é por este simbolo que hoje indicamos uma integral.

O Calculo Diferencial e Integral é a ferramenta básica e essencial por trás de todo trabalho de um físico. É por trás dessa nova linguagem que variações são representadas, então, grandezas como, velocidade, aceleração, potencial elétrico e muitas outras, são encontradas na forma de derivadas, e devido a ligação intima e derivação e integração, as integrais acabam sendo frequentes na física também.

6.2 Limites e Continuidade

Nesta seção o conceito de continuidade será apresentado, um dos mais importantes e também quiça,mais fascinante ideia de toda matemática. Mas assim como Dorothy em *'O Magico de Oz'*, a trilha de tijolos amarelos possui um caminho a ser seguida, então antes de devidamente dar uma definição formal e precisa sobre continuidade, é necessário primeiro discutir sobre isso de uma maneira informal e mais intuitiva, para pegar o sentimento do que está acontecendo.

Pois bem. assumindo que uma função f, em um ponto p, tenha o valor $f(p)$. Então intuitivamente, a função f é contínua em p, se seu gráfico não apresenta "*salto*" nesse ponto. Com isso, existem outras formas também informais de se colocar isso para um melhor entendimento. Uma maneira é que se qualquer ponto x na vizinhança de p, o valor da função $f(x)$ é muito próximo de $f(p)$. Outra é a seguinte, se deixarmos o ponto x se mover a p, então é esperado que os calores correspondentes $f(x)$ se tornem arbitrariamente próximos de $f(p)$, indiferente a maneira como x se aproxima de p. Isto é o que significa a função continua não apresentar "*saltos*" repentinos, como na figura abaixo.

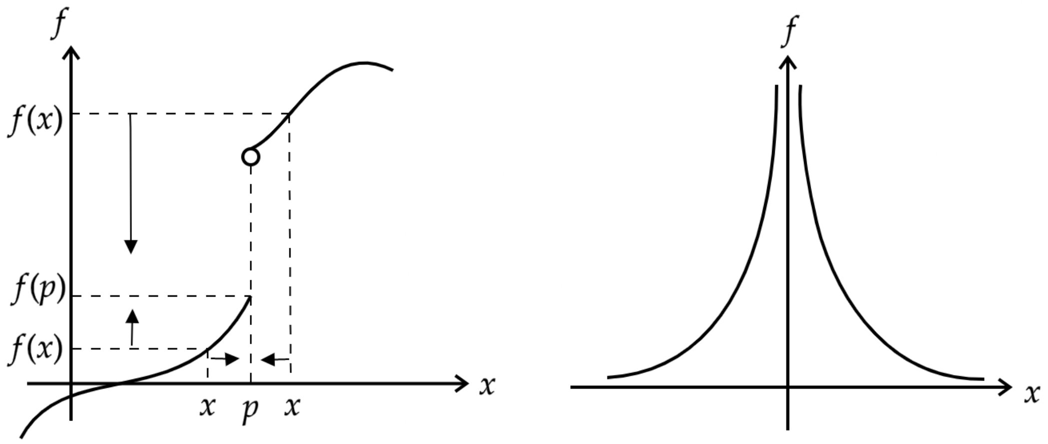


Gráfico de duas funções arbitrarias. O gráfico da esquerda, (a) possui uma descontinuidade por salto. O gráfico da direita (b) possui uma descontinuidade no infinito.

Veja que na figura acima no gráfico *(a)*, a função mostra uma descontinuidade em $x = p$, note que conforme x se aproxima de p pela direita, $f(x)$ assume um valor superior, enquanto conforme x se aproxima de p pela esquerda $f(x)$ assume um valor inferior. Porém vale notar que $f(x)$ de fato se aproxima de $f(p)$ pela esquerda, enquanto pela direita $f(x)$ se aproxima de um valor diferente de $f(p)$.

Para o gráfico *(b)*. perceba que diferente do gráfico *(a)*, não hã nenhum "*saltos*" ou "*ponto faltando*" no gráfico da função. Porém conforme x se aproxima de zero, tanto pela direita como pela esquerda, $f(x)$ não se aproxima de valor algum. Os valores de $f(x)$ simplesmente crescem cada vez mais que x se aproxima de zero, a função "*explode*" para valores de x próximos de zero, quando isso acontece, é dito que há uma **descontinuidade infinita** naquele ponto, neste caso, em $p = 0$.

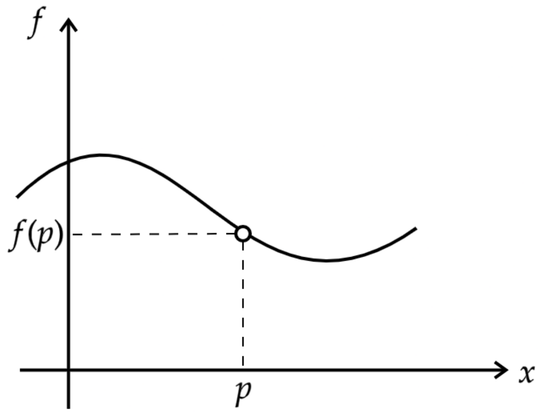


Gráfico de uma função arbitrária dentro de um intervalo, com descontinuidade no ponto p.

Outro exemplo, é o gráfico acima em que não se trata de nenhuma das duas outras descontinuidades citadas. A função f está definida em todos os pontos de seu domínio, exceto pleo ponto p, em que f não está definida.

No desenvolvimento dos primórdios do Cálculo não havia qualquer tratamento no que se diz respeito a funções descontinuas, não antes de J.B.J. Fourrier$(1758 - 1830)$ começar a trabalhar na teoria do calor, tornando necessário uma analise mais precisa dos conceitos de **função** e **continuidade**. Em qualquer dicionário popular a palavra *'continuidade'* significa uma qualidade ou estado de estar contínuo, enquanto a palavra *'contínuo'* significa possuir continuidade das partes, e por mais que essas ideias pareçam claras e intuitivas para a maioria das pessoas, não é nenhum pouco obvio como uma boa definição dessas ideias deveria ser formulada. A chave inicial para isto está em outro conceito, o **limite**.

Nesse contexto, efetivamente o que é analisado são tendencias, isso que a analise que está feito é a de qual o valor L, da imagem de f, $f(x)$ estará tendendo conforme x percorre o seu domínio em direção a p. Simbolicamente, isto é escrito como:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \tag{6.2.1}$$

Lê-se: "*o limite de $f(x)$ conforme x tende a p é igual a L*". Por uma questão de visualização, utilizando dessa ideia intuitiva, vamos calcular $\lim_{x \to 1}(x+1)$.

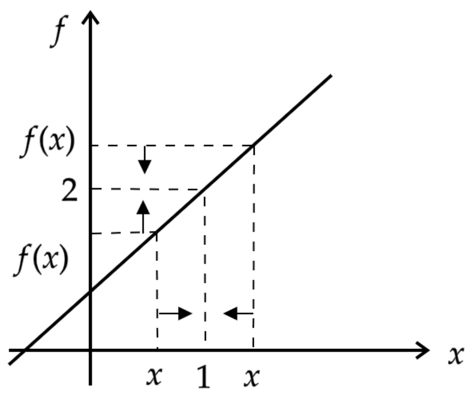


Gráfico da função $f(x) = x + 1$, mostrando o limite em que $x \to 1$.

Pela figura acima, pode-se ver claramente que $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$, que neste caso, é exatamente o valor da função neste ponto.

Outro exemplo utilizando da ideia intuitiva é o $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Note que a função não está definida em $x = 1$. Como $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1\ \forall x \neq 1$. Então, $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$. Porém, o gráfico da função será:

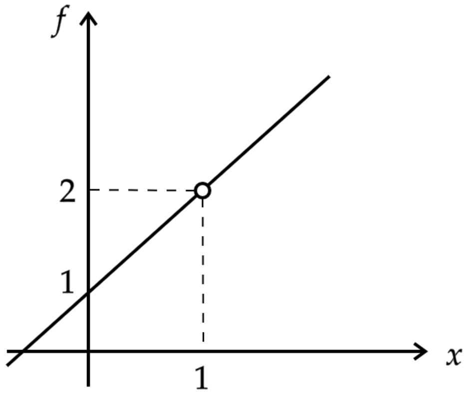


Gráfico da função $f(x) = x + 1$, em f não está definida em $x = 1$.

Intuitivamente, é razoável então que se f estiver definida em p e for contínua em p, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$, e a reciproca também é válida, ou seja,

$$\text{f é continua em } p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p) \tag{6.2.2}$$

Porem note que se $\lim_{x \to p} f(x) = L$ e se f não for contínua em p, então L será aquele calor que f deveria ter em p para ser contínua neste ponto. Perceba no gráfico abaixo.

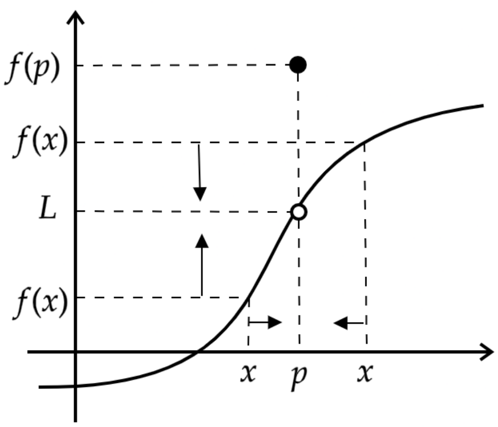


Gráfico de função qualquer com descontinuidade no ponto p.

Note que no $\lim_{x \to p} f(x) = L$, f está definida em p, mas $L \neq f(p)$. L é o valor que f deveria ter no ponto p, para ser contínua em p.

6.3 Se orgulhando de ε e δ

"O cálculo exigia continuidade, e supostamente a continuidade exigia o infinitamente pequeno; mas ninguém conseguia descobrir o que poderia ser o infinitamente pequeno."
- Bertrand Russel.

Agora que as noções intuitivas de continuidade e limite foram devidamente introduzidas, chegou a hora de dar rigor a essas noções, i.e, dar definições mais precisar aos conceitos apresentados. O rigor ao formalismo é o que faz da matemática uma ferramenta tao poderosa aos físicos, assim como no português é necessário ter uma linguagem formal a depender do contexto, na matemática não é muito diferente, muitas vezes apenas noções intuitivas não são suficientes.

Definição 6.1 (Continuidade em um Ponto). *Sejam f uma função e p um ponto, t.q, $p \in D_f$. A função f é contínua em p, se e somente se,*

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ dado}, \exists \delta(\varepsilon) > 0;\ \forall x \in D_f,\ |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

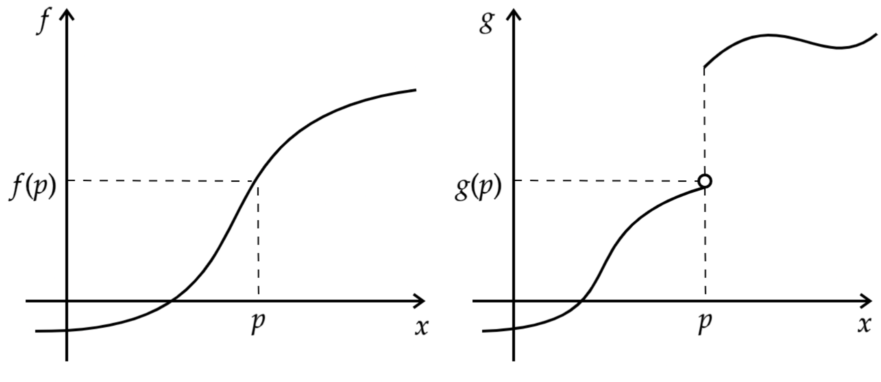
Veja que pela notação modular,

$$|x - p| < \delta \iff p - \delta < x < p + \delta \tag{6.3.1}$$

e

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon \iff f(p) - \varepsilon < f(p) < f(p) + \varepsilon \tag{6.3.2}$$

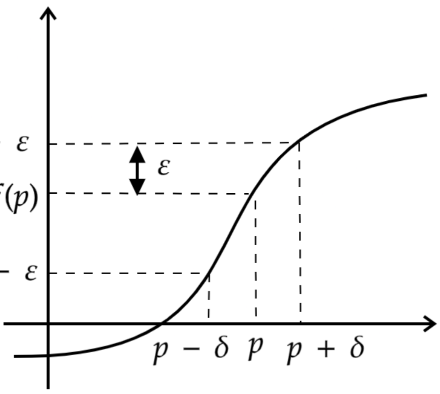
Formalmente, o que acabou se der feito foi uma classificação entre funções que atendem essa propriedade e funções que a não atendem. Para uma melhor ilustração, tome as duas funções abaixo, f e g.



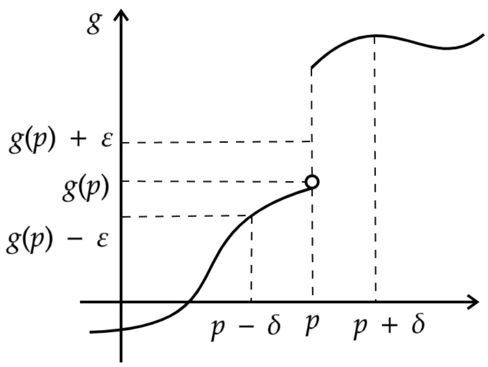
Pela noção intuitiva apresentada obviamente f é contínua e g não o é, mas vamos a uma analise formal. Para a função f, se associarmos uma altura ε em relação ao ponto $f(p)$, tanto em cima quanto embaixo e consequentemente associarmos larguras em relação p, de valor δ, tal que $\delta = \delta(\varepsilon)$[18], graficamente isso é

[18]Note que que tanto na definição de continuidade em um ponto e aqui, explicitamente foi escrito que $\delta = \delta(\varepsilon)$, isso não significa que δ seja uma função de ε como quando se escreve f(x), mas sim, que de alguma forma δ depende de ε.

visto da seguinte maneira:



Veja que a função f satisfaz a propriedade em que $\forall \varepsilon$ dado, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, t.q, f(x) permanece entre $f(p) - \varepsilon$ e $f(p) + \varepsilon$ quando x percorre o intervalo aberto $p - \delta, p + \delta)$, $\forall x \in D_f$. O que é completamente equivalente a definição de continuidade dada, logo f possui a propriedade de continuidade em em p[19]. Entretanto, a função g não satisfaz em p tal propriedade:



Para o $\varepsilon > 0$ acima, $\nexists \delta(\varepsilon) > 0$ que torne verdadeira a afirmação,

$$''\forall x \in D_f,\ p - \delta < x < p + \delta \Longrightarrow g(p) - \varepsilon < g(x) < g(p) + \varepsilon'' \qquad (6.3.3)$$

Qualquer que seja o $\delta > 0$ que se tome, quando x percorrer o intervalo aberto $(p - \delta, p + \delta)$, $g(x)$ não permanece entre $g(p) - \varepsilon$ e $g(p) + \varepsilon$.

A propriedade foi devidamente definida para um ponto p qualquer, t.q, $p \in D_f$. Porem se quiséssemos definir continuidade em um intervalo do domínio, i.e, $I \subseteq D_f$, então f será contínua em I, se houver continuidade em todo $p \in I$. Com isso, a continuidade global de f também é simplesmente, se f for continua em todo p de seu domínio.

Para pegar o sentimento desse formalismo, vamos provar que $f(x) = 2x + 1$ é continua em $p = 1$.

A essência dessa demonstração está em mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ dado, é possível conseguir um $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que,

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Longrightarrow f(1) - \varepsilon < f(x) < f(1) + \varepsilon \qquad (6.3.4)$$

[19]Note que isto não é uma prova, apenas um argumento gráfico para você se acostumar com definição formal de continuidade.

Lembrando que $\varepsilon > 0$ é **dado**, é de interesse encontrar $\delta(\varepsilon) > 0$ de modo que $f(x)$ permaneça entre $f(1) - \varepsilon$ e $f(1) + \varepsilon$, enquanto x percorre $1 - \delta$ e $1 + \delta$.

$$\because |x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon \tag{6.3.5}$$

$$\iff |2x + 1 - 3| < \varepsilon \iff |2x - 2| < \varepsilon \iff 2|x - 1| < \varepsilon \iff |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, pode-se tomar $\delta(\epsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$|x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

Logo, f é contínua em 1.

Exercício 6.1:

Tente pensar você mesmo em como definir formalmente a descontinuidade de uma função em um ponto p.

Exercício 6.2:

Prove que que qualquer função constante do tipo, $f(x) = k; k \in \mathbb{R}$, é contínua em todo p real.

Considere agora de uma forma mais geral, a função afim $f(x) = ax + b$, tal que, $a, b \in \mathbb{R}$, vamos provar que f é contínua em todo $p \in \mathbb{R}$.

Primeiramente note que que se $a = 0$, f é uma função constante e então cai no caso do exercício 6.2. Supondo então que $a \neq 0$.

$$\because |x - p| < \delta \Longrightarrow |ax + b - ap - b| < \varepsilon \iff |a||x - p| < \varepsilon \tag{6.3.6}$$

Assim, $\forall \varepsilon > 0$ dado,

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon \iff |x - p| < \frac{\varepsilon}{|a|} \tag{6.3.7}$$

Então, tomando-se $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$

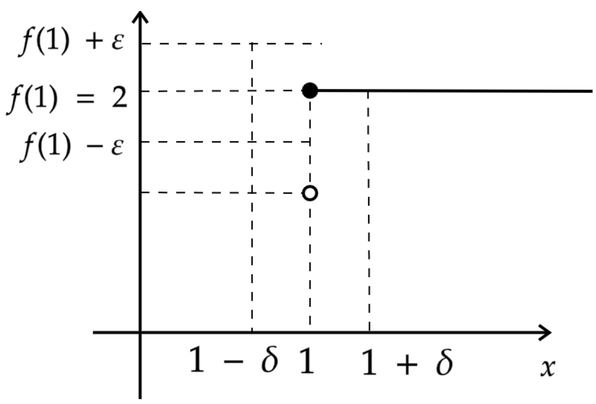
$$\therefore |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon \tag{6.3.8}$$

logo, f é contínua em p, e como p é arbitrário, então f é contínua em todo o domínio, i.e, em todo p real, isto faz com que a continuidade vá de uma propriedade **local** a **global**.

Agora vamos dar uma olhada em uma função que viole a definição de continuidade em um ponto, i.e, seja descontinua em p. Sera que a

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geq 1 \\ 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

é contínua em $p = 1$?



Intuitivamente, é imediato que f não é contínua por apresentar um salto em $p = 1$. Mas para provar de fato que f não é, é necessário achar um $\varepsilon > 0$ para o qual $\nexists\delta(\varepsilon) > 0$ que torne verdadeira a afirmação:

$$"\forall \in D_f,\ 1-\delta < x < 1+\delta \Longrightarrow f(1)-\varepsilon < f(x) < f(1)+\varepsilon \tag{6.3.9}$$

Pela definição da função, $f(x) = 1$ para $x < 1$ e $f(x \geq 1) = 2$. Pela necessidade de encontrar um $\varepsilon > 0$, pode-se tomar $0 < \varepsilon < 1$, por acaso, $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, então, $\forall\delta(\varepsilon) > 0$

$$1-\delta < x < 1 \Longrightarrow f(x) = 1 \tag{6.3.10}$$

Porem, se $f(x) = 1$, a desigualdade $f(1)-\varepsilon < f(x) < f(1)+\varepsilon$ está errada, logo $\delta(\varepsilon) > 0$ que torne verdadeira a afirmação, assim, f não é contínua em $p = 1$.

Toda essa discussão foi feita para você se acostumar com definição formal de continuidade. Haverão aqueles que apenas de ler a definição acharão a discussão feita até aqui, obvia demais, assim como haverão aqueles que precisavam que o dos tijolos amarelos fosse mostrado. Independente de qual situação você se encaixe, você precisara entender este formalismo enquanto ingressante do curso de física, por isso, exercite! como na fala de Von Neumann no inicio do capitulo, você irá se acostumar com esses conceitos.

Exercício 6.3:
Prove que $f(x) = x^2$ é contínua.
Exercício 6.4:
Seja f continua em p e $f(p) > 0$. Prove que $\exists\delta(\epsilon) > 0$, tal que, $\forall x \in D_f$; $p-\delta < x < p+\delta \Longrightarrow f(x) > 0$.
Exercício 6.5:
Seja f continua em p e $f(p) < 0$. Prove que $\exists\delta(\epsilon) > 0$, tal que, $\forall x \in D_f$; $p-\delta < x < p+\delta \Longrightarrow f(x) < 0$.

Os exercícios 6.4 e 6.5 destacam uma propriedade importante sobre funções continuas. Tal propriedade diz que se f é contínua em p e $f(p) \neq 0$, então $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $f(x)$ conservará o sinal de $f(p)$.

Definição 6.2 (Limite de uma função em um ponto). *Seja f uma função e p um ponto, t.q, $p \in D_f$. f possui limite L, em p, se, $\forall \varepsilon > 0$ dado, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, tal que, $\in D_f$*

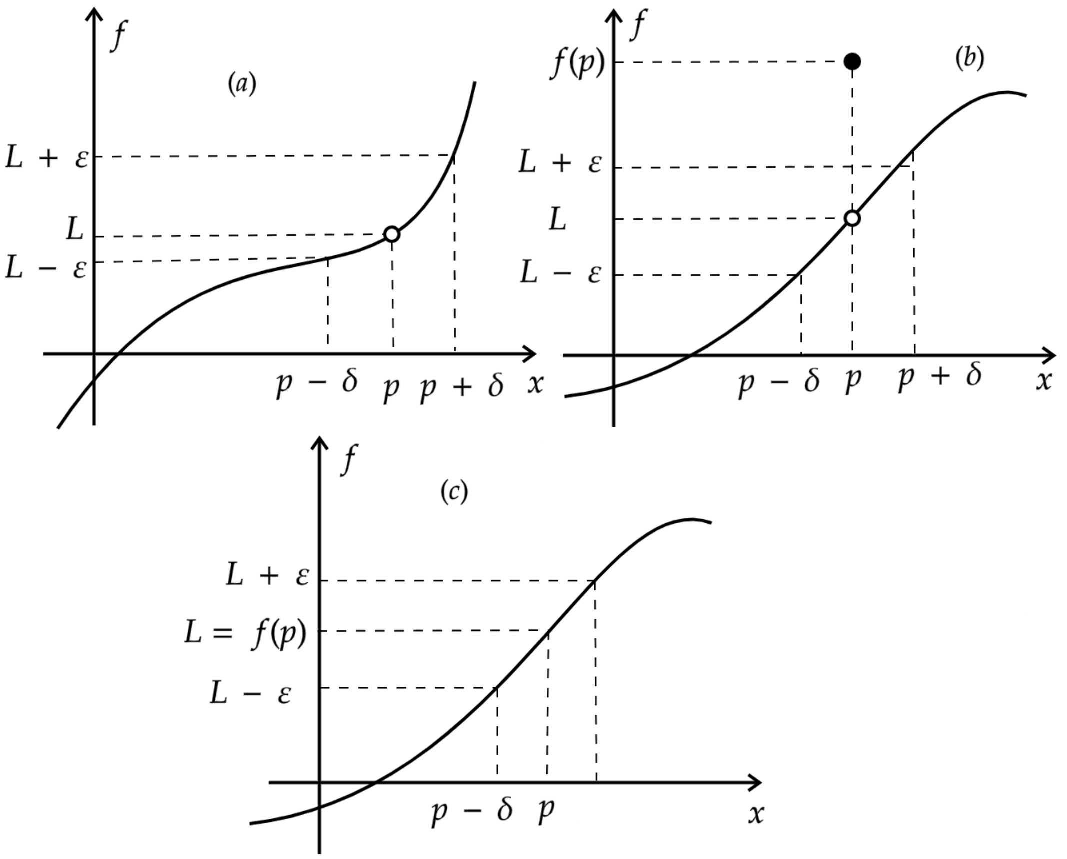
$$0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

O numero L, quando existe, é único e indicado por $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$

Assim,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ t.q,\ \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$

Visualmente, isto pode ser mostrado em três situações:



O gráfico (a) representa uma função em que há uma descontinuidade em p, então L assume o valor que $f(p)$ teria se f fosse definida em p. O gráfico (b) mostra uma função na qual $f(p)$ existe porém, p é um ponto de descontinuidade e então, $L \neq f(p)$. O gráfico (c) mostra uma função que é contínua em todo ponto e $L = f(p)$.

Note que há uma semelhança muito grande entre a definição formal de continuidade em um ponto e a definição formal de limite de uma função em um ponto. Isso porque,

$$f \text{ é contínua em p} \iff \lim_{x\to p} f(x) = f(p) \tag{6.3.11}$$

Vale ressaltar que o limite de f em p não depende do valor[20] que f assume em p, mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p. Quando for de interesse descobrir o limite de f em p, basta olhar os valores que f assume em um "pequeno"intervalo aberto em que p está contido, ou seja, o conceito de limite é algo estritamente **local**, diferente de continuidade, que foi mostrado que pode possuir propriedades **globais**.

Agora, com uma visão mais madura, recomendo fortemente que você, leitor, volte ao exemplo de limite discutido na seção anterior, faça a analise daquele limite com a definição formal. Treine os exercícios deixados aqui.

Devido aos objetivos dessas notas, as propriedades de limite e os limites fundamentais não serão discutidos em completa profundidade mas elas serão de grande uso para resolver diversos tipos de limite, porém, vez ou outra poderão ser resolvidos se utilizado das propriedades e dos limites fundamentais.

Propriedades dos Limites: Se $\lim_{x\to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L_2$

i . *Soma e Subtração*: $\lim_{x\to p}[f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2 = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x)$

ii . *Produto por uma Constante*: $\lim_{x\to p} kf(x) = k \cdot L_1 = k \lim_{x\to p} f(x); k \in \mathbb{R}$

iii . *Produto*: $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2 = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x)$

iv . *Divisão*: $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$

Limites Fundamentais:

i . *Trigonométricos*: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

ii . *Numero e*: $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

iii . *Logaritmo Natural*: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\lambda^x - 1}{x} = \ln a$

Exercício 6.6:

Calcule $\lim_{x\to p} k$ e prove pela definição formal o resultado de seu cálculo.

Exercício 6.7:

Prove todas as propriedades listadas.

[20]Caso f seja definida em p.

Exercício 6.8:

Sejam f, g e h, três funções, tal que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Se $\lim_{x \to p} g(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$. Prove que $\lim_{x \to p} f(x) = L$ também, por meio da definição formal de limite.

Exercício 6.9:

Prove os limites fundamentais.

Exercício 6.10:

Calcule os limites:

i . $\lim_{x \to 2} (3x - 2)$

ii . $\lim_{x \to 2} (5x^3 - 8)$

iii . $\lim_{x \to 2} (3x - 2)$

iv . $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}$

v . $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

vi . $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1}$

Exercício 6.11:

Prove que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \iff \lim_{h \to 0} f(p + h) = L$$

.

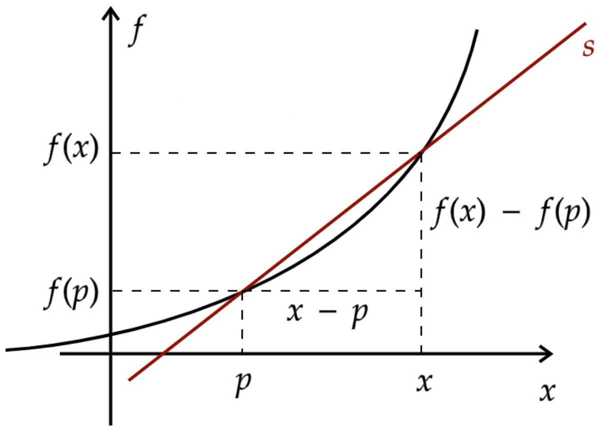
Dentro do que diz respeito a limites ainda existe muito conteúdo a ser visto, como, limites laterais, limite de funções compostas, limites infinitos e muito mais! Porem as ferramentas básicas foram dadas a você, leitor, para caminhar na trilha pelo que resta.

6.4 Derivadas

"Quem não se surpreendeu com o fato de que a função $y = e^x$, como uma fênix ressurgindo de suas próprias cinzas, é sua própria derivada?"
- Francois Le Lionnais.

Na primeira seção deste capítulo foi apresentado um dos problemas que motivou o surgimento do Cálculo diferencial, foi o problema de como encontrar retas tangentes a curvas e qualquer ponto. Pois bem, as ideias de continuidade de limite prepararam o terreno para que as derivadas que são tão recorrentes na matemática e na física sejam entendidas devidamente.

Assim, considerando o problema de definir a reta tangente ao gráfico de f em um ponto $(p, f(p))$. Evidentemente, se o problema está centrado em definir a tangente em $(p, f(p))$, então essa reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$, a tangente é então univocamente determinada se determinado o seu coeficiente angular[21]. Com isso, considerando então uma reta secante[22] ao gráfico de f que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$.



O coeficiente angular dessa reta, denominada por s, será

$$m = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{6.4.1}$$

Entretanto, veja que quando mais próximo o ponto x for de p, menor sera o tamanho $x - p$, ou seja, conforme x tende a p, o tamanho $x - p$ tende a zero e assim a reta terá apenas um ponto de intersecção com o gráfico de f, tornando-a uma reta tangente, que na linguagem de limites, significa possuir coeficiente angular:

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{6.4.2}$$

Ou, tomando $h = x - p$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h} \tag{6.4.3}$$

---

[21]Se alguns termos estiverem frescos na mente, não tenha vergonha, volte alguns capítulos, revise o que for necessário.
[22]Uma reta que intersecta a curva em dois pontos.

Dessa forma a derivada pode ser definida em termos de um limite.

Definição 6.3 (Derivada de uma Função em um Ponto). *Seja f uma função e p um ponto, t.q, $p \in D_f$. O limite*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$ ou $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=p}$.

Assim,

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=p} = f'(p) := \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Se f admite derivada em p, então f é dita derivável ou diferenciável em p. De forma geral f é uma função derivável ou diferenciável, se f for diferenciável em cada ponto de seu domínio.

Com efeito, se você sabe calcular limites também sabe calcular derivadas, cabe então apenas exemplos para pegar o sentimento do que está acontecendo.

Seja $f(x) = k$ uma função constante, qual a sua derivada $\forall x \in D_f$?

Como $f(x) = k,\ \forall x \in D_f$ por definição, então $f(x+h) = k,\ \forall p$.

$$\implies f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \tag{6.4.4}$$

Agora um exemplo um pouco mais difícil. Seja a função $f(x) = x^n$, tal que $n \in \mathbb{R}$, qual a derivada de f em um ponto p qualquer?

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=p} = \lim_{h \to} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

Veja que $f(p+h) = (p+h)^n$, pelo teorema binomial, [23]

$$f(p+h) = (p+h)^n = p^n + np^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}h^2 + ... + h^n + ... \tag{6.4.5}$$

$$\because \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=p} = \lim_{h \to 0} \frac{p^n + np^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}h^2 + ... + h^n + ... - p^n}{h} \tag{6.4.6}$$

Colocando h em evidência,

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=p} = \lim_{h \to 0} \frac{sh(np^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}h + ... + h^{n-1} + ...}{h} \tag{6.4.7}$$

[23]Novamente, você não precisa a fundo o teorema binomial, apenas aceite o entenda minimamente o resultado e porque ele é usado.

$$\iff \lim_{h \to 0} np^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}h + ... + h^{n-1} + ... \tag{6.4.8}$$

Todos os termos com o fator h vao a zero, logo,

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=p} = \lim_{h \to 0} np^{n-1} = np^{n-1} \tag{6.4.9}$$

Como ultimo exemplo, seja $f(x) = \sin x$, sua derivada em um ponto p será:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=p} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(p+h) - \sin p}{h} \tag{6.4.10}$$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{\sin p \cos h + \cos p \sin h - \sin p}{h}$$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{\sin p \cos h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \cos p}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin p}{h}$$

$$\iff -\lim_{h \to 0} \frac{\sin p(1 - \cos h)}{h} + \cos p \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\iff \cos p \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\therefore \left.\frac{df}{dx}\right|_{x \to p} = \cos p \tag{6.4.11}$$

Mais uma vez o caminho das pedras foi mostrado, agora é a hora de praticar. Derivadas do tipo polinomiais e trigonométricas aparecem com frequência, mas não são as únicas.

Exercício 6.12:
Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule $f'(2)$ utilizando do resultado geral obtido em (6.4.9) e também resolvendo explicitamente pela definição da derivada como um limite. Compare. Você esta correto?
Exercício 6.13:
Seja $f(x) = x^2$. Calcule *(a)* $f'(1)$; *(b)* $f'(x)$; *(c)* $f'(3)$; explicitamente e depois utilizando o resultado geral. Compare. Você está correto?
Exercício 6.14:
Mostre que $f(x) = |x|$ é diferenciável em qualquer ponto $p \neq 0$ e não é diferenciável em $p = 0$.
Exercício 6.15:
Suponha f diferenciavel em p e seja $\rho(x)$; $x \in D_f$ e $x \neq p$, dada por:

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \rho(x)(x - p)$$

Mostre que $\lim_{x \to p} \rho(x) = 0$.

A este ponto do campeonato deve estar bem claro que ficar calculando derivadas explicitamente o tempo todo não é uma tarefa eficaz. Por isso existem propriedades de derivação e derivadas de funções que são tabeladas. Assim, sempre que aparecer uma função do tipo x^n, você leitor, saberá que $f'(x) = nx^{n-1}$ sem precisar passar por todo o processo mecânico novamente. Porém, mesmo com derivadas já tabeladas, é necessário enfatizar que é de bom uso que você demonstre cada uma delas, ao menos uma vez na vida.

Propriedades das Derivadas: Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante real. Então, as funções $f \pm g$, kf e $f \cdot g$ são deriváveis em p e tem-se:

i .*(Soma e Subtração)*: $\Big(\lambda f(x) \pm \alpha g(x)\Big)' = \lambda f'(x) \pm \alpha g'(x);\ \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$

ii . *Produto*: $\Big(f(x)g(x)\Big)' = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$

iii . *(Quociente)*: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$; se $g(x) \neq 0$

iv . *(Regra da Cadeia)*: $\Big(f(g(x)\Big)' = f'(g(x))g'(x)$

Tabela de Derivadas:

i . $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^n n - 1$

ii . $f(x) = |x| \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$; se $x \neq 0$

iii . $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln x$; $\forall a : 0 < a <\neq 1$

iv . $f(x) = \log_a x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

v . $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$

vi . $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

vii . $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$

viii . $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$

ix . $f(x) = \tan x \Longrightarrow f'(x) = \sec^2 x$

x . $f(x) = \sec x \Longrightarrow f'(x) = \sec x \tan x$

xi . $f(x) = \csc x \Longrightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

xii . $f(x) = \cot x \Longrightarrow f'(x) = -\csc^2 x$

xiii . $f(x) = \arcsin x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

xiv . $f(x) = \arccos x \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

xv . $f(x) = \arctan x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Por mais que não vá ser provado nessas notas é válido enunciar o teorema de L'Hôpital, também conhecido como regra Regra de L'Hôpital, que aplica-se ao cálculo de limites que apresentam indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Teorema 6.1 (Primeiro Teorema de L'Hôpital)**.** *Sejam f e g duas funções diferenciáveis no intervalo aberto $(p-r,p)$ e em $(p,p+r)$; $r>0$ com $g'(x)\neq 0$. Para $0<|x-p|<r$. Se*

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 = \lim_{x\to p} g(x)$$

e $\exists \lim_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *então* $\exists \lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *de forma que,*

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema 6.2 (Segundo Teorema de L'Hôpital)**.** *Sejam f e g duas funções diferenciáveis no intervalo aberto $I=(m,p)$; $g'(x)\neq 0$ em I. Se*

$$\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to p} g(x)$$

e $\exists \lim_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *então* $\exists \lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *de forma que,*

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Veja o poder destes teoremas para eliminar indeterminações em limites, por exemplo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$, que é indeterminado, por[em por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Exercício 6.16:

Prove todas as propriedades de derivada mostradas utilizando da definição por limite.

Exercício 6.17:

Prove cada uma das derivadas tabeladas.

Exercício 6.18(Apenas para masoquistas):

Prove as duas regras de L'Hôpital enunciadas.

Exercício 6.19:

Calcule os limites utilizando dos teoremas de L'Hôpital.

i . $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}$

ii . $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

iii . $\lim_{x\to+\infty} e^x\left[e - \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x\right]$

iv . $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

v . $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$

Exercício 6.20:

Pense e explique com suas próprias palavras, por que não é correto resolver o limite fundamental trigonométrico utilizando da regra de L'Hôpital.

Agora uma das ferramentas mais poderosas do cálculo foi devidamente apresentada, é a hora de algumas aplicações físicas!

Que significa a frase: "velocidade em um dado instante t"? Reflita sobre isso por um instante.

Para ilustrar isso, suponha que exista uma partícula pontual se deslocando na horizontal, que pode ser representado pelo eixo x, de forma que a função de posição no tempo é indicada por $x = x(t)$.

Isso significa dizer que a função $x(t)$ fornece a cada instante a posição ocupada pela partícula[24]. A velocidade média da partícula entre os instantes t e $t + \Delta$ é definida como,

$$v_m := \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{6.4.12}$$

em que $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$. A velocidade da partícula em um dado instante t é definida como a derivada da posição em relação ao tempo,

$$v(t) := \frac{dx}{dt} \tag{6.4.13}$$

Ou, pela definição por limite,

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta} \tag{6.4.14}$$

A aceleração dessa mesma partícula em um instante t é definida como a derivada da velocidade em relação ao tempo.

$$a(t) := \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{6.4.15}$$

Isso significa que a aceleração em um instante t é a derivada segunda da posição em relação ao tempo, uma derivada de **segunda ordem**[25]. Aqui a noção da derivada como uma taxa de variação ganha mais significado, pois renunciando o que foi dito, a velocidade em um instante t, não é nada mais do que a taxa de variação da posição no tempo, em que Δt é muito pequeno, e o mesmo vale para a aceleração.

Exercício 6.21:

Considere uma partícula que executa uma trajetória da forma $x(t) = x_0 + v_0 t + \lambda t^2$. *(a)* Calcule a velocidade e aceleração em um instante t. *(b)* Calcule a velocidade em $t = 4$s.

[24] Você pode imaginar essa partícula o deslocamento dessa partícula, se preferir menos abstração, como sendo simplesmente o para-choque de um carro em movimento.

[25] Derivadas podem existir em qualquer ordem, seja terceira, quarta e assim por diante ate a n-ésima ordem, porem na física o mais comum são de ate segunda ordem por motivos mais avançados que não cabem nos escopo dessas notas.

Frequentemente problemas similares aos do exercício 6.21 aparecem nos cursos de Física Básica, seja de maneira mais leve ou com um maior grau de complexidade.

Uma característica de derivadas é como ela pode determinar pontos de máximo e mínimo de funções, tanto de forma local, como de forma global, basta dar uma atenção maior a interpretação geométrica das derivadas.

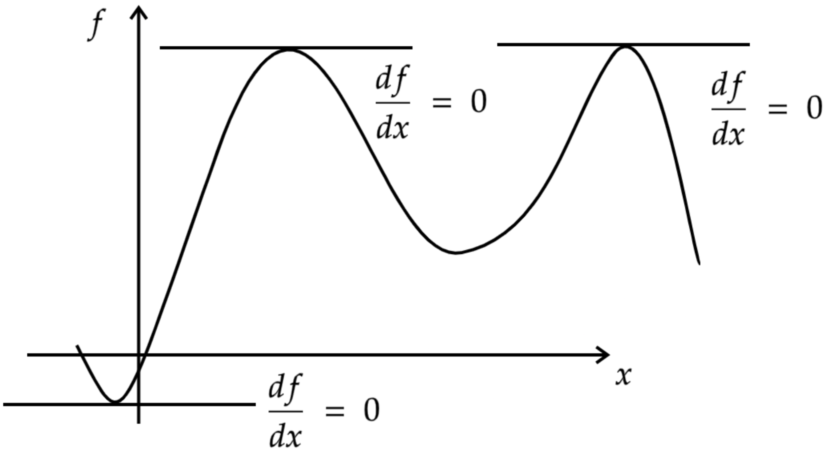


Gráfico de uma função f qualquer, mostrando os pontos de máximo e mínimo locais, pontos estes em que a derivada primeira iguala a zero.

Essa propriedade é completamente utilizada já que com certa frequência é de interesse descobrir qual o alcance máximo de um lançamento, qual o mínimo de energia de um sistema, qual a máxima velocidade de um projétil e etc. Porém apenas calcular a derivada primeira, por vezes, não é suficiente, pois em geral só se ganha conclusões sobre o comportamento da função na vizinhança daquele ponto, ou seja, máximo e mínimos locais. Porém algo que a derivada primeira fornece é sobre o comportamento da função em termos de crescimento ou decrescimento em dado ponto p.

Exercício 6.22:

Considere uma partícula que se desloca ao longo do eixo x de acordo com $x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$; $t \geq 0$ e $v_0, k > 0$. *(a)* Qual a velocidade no instante t? *(b)* Com argumentos físicos e matemáticos, justifique por que a função é estritamente crescente. *(c)* Qual a aceleração no instante t?. *(d)* Com argumentos físicos e matemáticos justifique porque o gráfico da função de posição possui concavidade para baixo. *(e)* Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} (1 - e^{-kt})\frac{v_0}{k}$.

Exercício 6.23:

Considere o movimento circular de uma partícula dado por $x(t) = r \cos t$; $y(t) = r \sin t$, tal que r [e o raio. Qual a velocidade máxima e miníma que essa partícula pode alcançar tanto na direção x como y?

Exercício 6.24:

Considere uma partícula no topo de um plano inclinado. Se essa partícula é lançada como um lançamento oblíquo do plano inclinado. Encontre o alcance máximo que essa partícula pode ter e o tempo que leva a percorrer a trajetória.

Uma das grandezas fundamentais na descrição de sistemas físicos é a *'energia'*. Por vezes descrever um sistema via energias "contidas"nele é mais simples do que resolver diagramas de força e por fim encontrar a equação de movimento que rege o sistema. Energia essa dita que pode assumir a forma de cinética, potencial gravitacional, potencial elástica, potencial elétrica, potencial mecânica e *etc*. É por meio da analise de energia que pode vir a se tornar mais simples determinar se uma partícula se encontra em pontos de equilíbrio estável, instável ou até mesmo nenhuma das opções anteriores.

Os pontos de equilíbrio são aqueles que extremizam a função energia potencial[26], isso significa que são pontos em que a energia potencial é máxima ou mínima. Matematicamente, isso é representado por $\frac{dU}{dx} = 0$ [27]. No entanto, determinado os pontos de equilíbrio é necessário saber qual a natureza deste equilíbrio, estável ou instável. Para isso, calcula-se $\frac{d^2U}{dx^2}$, o que graficamente é representado pelo gráfico de $U(x)$.

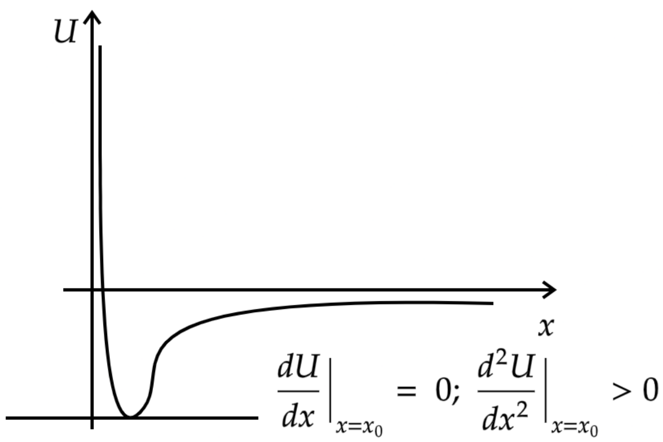


Gráfico do potencial de Leonard-Jones $U(x)$ em uma dimensão, em que há apenas um ponto de equilíbrio, que é do tipo estático, em que a derivada de segunda ordem é positiva naquele ponto.

Exercício 6.25:

Uma particula move-se ao longo da direção x sob o efeito de uma força $F(x) = -kx + Kx^2$, onde $k = 200\text{N/m}$ e $K = 300\text{N/m}^2$. *(a)* Calcule a energia potencial $U(x)$ da partícula sabendo que $F(x) = -\frac{dU}{dx}$, tal que $U(0) = 0$ e faça o gráfico de $U(x)$ para $-0.5 < x < 1$. *(b)* Ache as posições de equilíbrio e discuta a estabilidade com suas próprias palavras.

Exercício 6.26:

A energia potencial gravitacional de uma partícula de massa m a uma distancia x de um corpo de massa M é dada por $U(x) = -\frac{GMm}{x}$. Mostre que a força

[26] Seja ela de qualquer natureza que for.

[27] Para forcas do tipo conservativas, vale que a forca resultante do sistema pode ser escrita como $F = -\frac{dU}{dx}$, como pontos de equilíbrio são aqueles em que a soma das forcas resultantes iguala zero, faz sentido que essa derivada também iguale a zero.

gravitacional é $F = -\dfrac{GMm}{x^2}$. Por que é possível determinar a força gravitacional a partir de U? Reflita sobre isso e faça o mesmo para outros tipos de energia potencial, como elástica e mecânica.

6.5 Noções de Integral

"Frequentemente ouvimos que o trabalho de um matemático consiste principalmente em provar teoremas. Seria o trabalho de um escritor apenas escrever sentenças?"
- Gian-Carlo-Riota.

O outro problema que diz respeito ao coração do cálculo é o problema das áreas sob curvas, a **integração**. Por mais que essa palavra até então não traga nada de familiar dentro do que foi visto. Mas como visto na primeira seção deste capítulo, os problemas da derivada e integral se conectam fortemente. Mas para isso é necessário o seguinte corolário. [28]

Corolário 6.1. *Sejam f e F duas funções contínuas em um intervalo I. Se* $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{df}{dx}$ $\forall x \in I$, *então* $\exists k \in \mathbb{R}$, *t.q,*

$$f(x) = F(x) + k$$

$\forall x \in I.$

Este corolário agirá diretamente no Teorema Fundamental do Cálculo, este corolário também, faz necessário que a noção de primitiva[29] seja enunciada.

Definição 6.4 (Primitiva de Uma Função)**.** *Seja f uma função definida em um intervalo I. Uma primitiva de f em I, é uma função F também definida em I, t.q,*

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

$\forall x \in I.$

A partir da definição, juntamente com o corolário, sendo F uma primitiva de f em I, então $\forall k \in \mathbb{R},\ F(x) + k$, também é primitiva de f em I. Consequentemente pelo corolário, se duas funções tem derivadas iguais num intervalo, elas diferem neste intervalo por uma constante. Com isso, as primitivas de f em I são as funções da forma $F(x) + k$, com k constante. Então,

[28] Um corolário é simplesmente a forma "fraca"de um teorema. Não é uma afirmação tao forte a ponto de poder se caracterizar como um teorema e pode deduzido a partir de algumas afirmações anteriores.

[29] Spoiler: uma primitiva pode também ser chamada de anti-derivada, em breve será entendido o porque

$$y = f(x) + k;\ k \in \mathbb{R} \tag{6.5.1}$$

é a família das primitivas de f em I. Para representar isto na notação mais compacta e moderna, a família de primitivas é representada por,

$$\int f(x)dx = F(x) + k \tag{6.5.2}$$

A função f é chamada de o integrando. Uma única F é denominada integral indefinida de f, porém o mais comum é se referir a $\int f(x)dx$ como a integral indefinida de f.[30]

Veja por exemplo que $\int x^n dx \quad \neq -1$ é mais simples do que parece. Pela definição de primitiva,

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big) = x^n \Longrightarrow \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k;\ \ k \in \mathbb{R} \tag{6.5.3}$$

Note que maravilha! A integração se comporta como uma operação inversa a derivação e vice-versa. Se F for conhecida, automaticamente é possível determinar f.

Assim como a derivada, a integral possui fortes características geométricas, pela sua aplicação ao cálculo de áreas, que é a maior preocupação aqui e também por sua aplicação contínua na física, por exemplo, calcular o trabalho exercido por uma força variável. Como visto na seção 6.1, uma das formas de obter a área abaixo do gráfico de uma função é via aproximação de retângulos, i.e, serão adicionados infinitos retângulos, infinitamente finos até que toda a área desejada seja preenchida. A sutileza por trás deste argumento está justamente na afirmação "infinitos retângulos, infinitamente finos", isso significa que quanto "maior"o número de retângulos, melhor se torna a aproximação da área. Matematicamente isso pode ser afirmado como: "Basta tomar o limite da soma da área dos retângulos quando o número de retângulos tende ao infinito".

[30] O domínio da função f que ocorre em $\int f(x)dx$ deverá ser sempre um intervalo; nos casos em que o domínio não for mencionado, ficará implícito que se trata de um intervalo.

`Imagens/int1.png`

Aqui entra o conceito de partição de um intervalo. Considerando um intervalo $[a, b]$ divido em n partes, i.e, *particionado*.

A amplitude de cada intervalo, será $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, se a partição for regular $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} \ \forall i$. Porém isso não é completamente necessário, por mais que seja mais simples ter uma partição regular. Sendo a partição tomada, irregular, isso implica que existe $\Delta x_{\text{máx}}$ vai indicar a maior das partes. Assim uma partição $\mathsf{P} = \left\{ x_1, x_2, ..., x_n \right\}$ de $[a, b]$ é indicada por:

$$\mathsf{P} := \left\{ a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b \right\} \tag{6.5.4}$$

Isso implica diretamente então que existirão n retângulos de base Δx_i, com respectivas alturas $f(\Delta_i)$ distintas, em que $\lambda_i \in [x_{i-1}, x_i]$. A soma da área destes retângulos sera,

$$\mathsf{S} = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i \tag{6.5.5}$$

Se f for continua em $[a, b]$, então tomando o limite em que $\text{máx}\Delta x_i \to 0$ implica que $n \to \infty$, pois quanto menores todos os Δx_i maior o numero n.

$$\Longrightarrow \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i = L \tag{6.5.6}$$

Tal numero L, quando existe é único e denomina-se integral de Riemann de f em $[a, b]$, indicada por:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i \tag{6.5.7}$$

Veja que da mesma forma que as primitivas são utilizadas para obter as integrais indefinidas, o mesmo é feito com as integrais definidas, porém sem a constante de integração devido ao fato de que o intervalo se torna explícito. Isso apenas é possível devido ao **Teorema Fundamental do Cálculo**.

Teorema 6.3 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for primitiva de f em $[a, b]$, então,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv \Big[F(x)\Big]\Big|_a^b$$

$\forall x \in [a, b]$

O exemplo mais simples é de uma função polinomial, por acaso,

$$\int_1^2 x^2 dx \tag{6.5.8}$$

Como $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é primitiva de $f(x) = x^2$, já que $\frac{dF}{dx} = \frac{3}{3}x^2 = x^2$. Com efeito, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \tag{6.5.9}$$

Isso significa então dizer que a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 2]$ é $\frac{7}{3}$.

Outro exemplo, não tão complicado, porém comum é, $\int_0^\pi \sin x dx$. Como $F(x) = -\cos x$ é primitiva de $f(x) = \sin x$, pois $\frac{dF}{dx} = \sin x$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = (-1)\cdot(-1) + 1 = 2 \tag{6.5.10}$$

Bom, então é só isso? Não, assim como qualquer assunto, integrais podem se tornar tao dificultosas quanto se queira, então por isso, assim como as derivadas, existem certas propriedades seguidas pela integral e integrais de funções conhecidas, i.e tabeladas.

Teorema 6.4 (Propriedades da Integral)**.** *Sejam f e g integráveis em $[a, b]$ e $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

i . $\lambda f + \alpha g$ é integrável em $[a, b]$, entao,

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \alpha g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \alpha \int_a^b g(x)dx$$

ii . Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

iii . Se $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tabela de Integrais:

i . $\int x^n dx = \frac{x^n + 1}{n+1} + k$

ii . $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$

iii . $\int e^x dx = e^x + k$

iv . $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$

v . $\int \sin x dx = -\cos x + k$

vi . $\int \cos x dx = \sin x + k$

vii . $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + k$

viii . $\int \sec^2 x dx = \tan x + k$

ix . $\int \csc^2 x dx = -\cot x + k$

x . $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + k$

xi . $\int \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\lambda} + k$

xii . $\int \frac{1}{\lambda^2 + x^2} dx = \frac{1}{\lambda} \arctan \frac{x}{\lambda} + k$

As equações já conhecidas por você leitor, que aparecem na física, mesmo que de foram disfarçada, são o que formalmente são chamadas de equações diferenciais. Isso apenas quer dizer que são equações em que há derivadas envolvidas, e consequentemente taxas de variação do sistema físico. A depender da equação diferencial, para resolve-la basta aplicar o método mais simples possível, ou seja, integrar quantas vezes forem necessárias. Por exemplo, a equação (6.4.13), se caracteriza como uma equação diferencial, para resolve-la, basta integrar com respeito ao tempo, no caso, dt.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \int \frac{dx}{dt} dt = \int v(t) dt \iff x(t) = \int v(t) dt \tag{6.5.11}$$

e o mesmo pode ser feito para a aceleração em relação a velocidade.

Exercício 6.27:
Prove o corolário enunciado nessa seção.
Exercício 6.28:
Prove o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exercício 6.29:

Prove todas as propriedades de integral listadas

Exercício 6.30:

Prove todas as integrais listadas na tabela

Exercício 6.31:

Prove o corolário enunciado nessa seção.

Exercício 6.32:

Demonstre em detalhes, em uma dimensão espacial, que é o Teorema Trabalho-Energia Cinética é válido.

$$W = \Delta T = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$$

Vale lembrar que o trabalho é definido como $W = \int F dx$ em uma dimensão espacial e que $F = ma$.

Exercício 6.33:

De acordo com a lei da gravitação de Newton, o planeta Terra, que possui massa M, atrai uma partícula de massa m com uma força de intensidade, $f(r) = G\frac{Mm}{r^2}$. Em que r é a distancia da partícula ao centro da Terra. Suponha, agora, que a partícula seja lançada da superfície da Terra com velocidade inicial $v_0 > 0$ e que a única força atuando sobre ela seja a gravitacional. Mostre que o menor valor de v_0 para que a partícula não retorne a Terra é $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

O Fim da Jornada

E aqui chega ao fim. Infelizmente, tudo que é bom acaba e este é o fim da sua trilha de tijolos amarelos. Assim como em 'O Mágico de Oz', não há nenhum mágico no fim da trilha, assim como você, eu, Caio César, sou apenas um estudante que alguns anos atrás passei pelo que você está passando, pelas coisas que você está estudando. Agora é hora de voar, tomar seu próprio caminho, escolher alguma das referencias que seja de sua preferencia e atacar, debulhar questão a questão, só assim o verdadeiro conhecimento sobre esses assuntos é possível, a prática é sua melhor amiga.

Sempre que uma trilha de tijolos amarelos, uma outra trilha de outra cor pode vir a iniciar, e essa não foi nem a primeira e nem será a última vez na sua vida de estudos que isso virá a acontecer. Por isso lhe dou aqui alguns concelhos finais, que acabei aprendendo do jeito mais difícil, para que você não precisasse.

1. Estudar matemática queima fosfato! Você vai cansar, daqui em diante as vezes será comum não conseguir resolver algumas questões em um único dia, levará dias para conseguir a solução, mas solucionar, será uma mudança de ares em sua mente de uma forma que ela nunca mais voltara a ser a mesma.

2. Ensine! Por mais eu já tivesse estudado todos esses assuntos deste minicurso, eu aprendi muito mais do que qualquer estudante que venha a ler essas notas, no processo de produção delas, procurando sempre a maneira mais simples de se explicar o assunto sem que um único detalhe fundamental fosse deixado de lado. O que me traz para minha última dica.

3. Faça amizades. Matemática é difícil sim. Porém a jornada se torna mais leve quando se tem com quem compartilhar. Ensinem uns aos outros, preparem mini aulas sobre os tópicos que estiverem estudando. Uma boa amizade pode impulsionar mais do que se espera.

Boa sorte ao longo de seus anos de estudo, agora como estudante de física.

"*Ofereço este trabalho como os princípios matemáticos da filosofia, pois toda essência da filosofia parece consistir isso-a partir de fenômenos de movimento, investigar as forças da natureza e então, dessas forças demonstrar os outros fenômenos.*

- Isaac Newton".

Parte IV
Apêndices e Outros

7 Apêndice I: Símbolos Matemáticos

Símbolos	Significado	Exemplo
$\Longrightarrow$	Implica que	$x = 10 \pm 2 \Longrightarrow x = 12$ ou $x = 8$
$\Longleftrightarrow$	Se e somente se	$t + 0 = 0 \iff t = 0$
$\exists$	Existe	$\exists x$ t.q, $x^2 + 2x + 1 = 0$
$\exists!$	Existe um(a) único	$\exists!$L = $\lim f(x)$
$\in$	Pertence a	$a \in \mathbb{R}$
$\notin$	Não pertence a	$\pi \notin \mathbb{Q}$
$\subseteq$	Subconjunto de	$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
$\nsubseteq$	Não é subconjunto de	$A \nsubseteq B$
$:=$	Definido,Definição	$:= \{\forall a \in \ a = 0\}$
$\equiv$	Equivale a, Equivalência	
$\approx$	Aproximadamente	$\sin(0.01) \approx 0.01$
$\rightarrow$	Tende a	$\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)$
$\pm$	Mais ou menos	$x \rightarrow \pm\infty$
$\forall$	Para todo	$\{\forall x \in \mathbb{R}\ \exists(-x) \vert x + (-x) = 0\}$
$\vert$, ; , :	Tal que	$D_f := \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 1\}$
$\cup$	União	$A \cup B$
$\cap$	Intersecção	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} =$

8 Apêndice II: Somar 0 e Multiplicar por 1

Frequentemente na matemática e na física são encontradas algumas expressões que notavelmente podem ser reduzidas, expandidas ou simplificadas de alguma forma, por fins práticos, algumas dessas expressões serão especiais, os chamados **produtos notáveis**, e outras vezes serão apenas técnicas espertas de como simplificar suas equações, como somar 0 e multiplicar por 1.

Produtos Notáveis

As primeiras coisas primeiro. Tome a seguinte soma, $(2+2)^2$, trivialmente é de conhecimento que isso se tornaria $4^2 = 16$, mas ao mesmo objetivo, muitas vezes existem vários caminhos. Note como $(2+2)^2 = (2+2)(2+2)$ o que nos permite pela propriedade *distributiva* multiplicar os termos entre parenteses.

$$(2+2)^2 = (2+2)(2+2) = 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 \tag{8.0.1}$$

$$(2+2)^2 = (2+2)(2+2) = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 16 \tag{8.0.2}$$

Apesar do método, o resultado foi o mesmo, foi utilizado de um produto notável para que fosse alcançado o resultado, o quadrado da soma. Tome outro exemplo como $(3+x)^2$

$$(3+x)^2 = (3+x)(3+x) \tag{8.0.3}$$

$$(3+x)(3+x) = 3^2 + 3x + 3x + x^2 = (3+x)^2 \tag{8.0.4}$$

$$(3+x)^2 = x^2 + 6x + 9 \tag{8.0.5}$$

É válido agora definir um quadrado da soma da forma mais geral, dentro do possível.

Definição 8.1. *Quadrado da Soma: Sejam $a, b \neq 0$ tal que $a, b \in \mathbb{R}$, então o produto da soma de a e b, é dado por:*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exercício:

Dado o produto da soma de dois números reais $a, b \neq 0$ quaisquer, dê a interpretação geométrica do quadrado da soma.

Porem este não é o único produto notável existente, note o seguinte exemplo, $(4-2)^2$, novamente é de conhecimento que $(4-2)^2 = 2^2 = 4$, mas isto também pode ser expandido da forma,

$$(4-2)^2 = (4-2)(4-2) \tag{8.0.6}$$

$$(4-2)(4-2) = 4^2 - 8 - 8 + 2^2 = 16 - 16 + 4 = 4 \tag{8.0.7}$$

Tome agora outro exemplo com uma pequena dose de abstração, $(2-x)^2$

$$(2-x)^2 = (2-x)(2-x) \tag{8.0.8}$$

$$(2-x)(2-x) = 2^2 - 2x - 2x(-x)^2 = 4 - 4x + x^2 \tag{8.0.9}$$

$$(2-x)^2 = x^2 - 4x + 4 \tag{8.0.10}$$

Se torna valido, mais uma vez vir com outra definição que imponha generalidade dentro do contexto trabalhado.

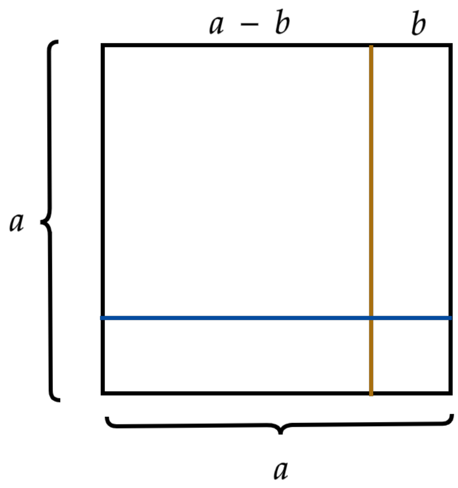
Definição 8.2. *Quadrado da Diferença: Sejam $a, b \neq 0$ tal que $a, b \in \mathbb{R}$, então o produto da diferença de a e b, é dado por:*

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exercício:

Dado o produto da diferença de dois números reais a e b quaisquer, dê a interpretação geométrica deste produto.

Tome um quadrado de lado a, em que uma fração deste lado é b, em que o esquema da área deste mesmo quadrado, é dada pela imagem abaixo:



Exercício:

Seja o quadrado da imagem acima, calcule sua areá e defina o produto notável resulte deste cálculo conhecido como **produto da soma pela diferença**.

Somar 0

Essa seção e a seguinte, serão curtas, pois se tratam de técnicas baseadas em exemplos, porem de grande utilidade quando enfrentando problemas de *Calculo Diferencial e Integral* e que virão a ser de grande uso nos capítulos seguintes.

Veja uma situação a princípio inofensiva, $x^2 - 4x$, por mais que essa expressão possa ser fatorada, ainda é possível reescreve-la para que ganhe uma forma mais compacta, somando 0. Seria de bom agrado que essa expressão tivesse um $+4$, pois haveria possibilidade de compactar em um produto notável, mas como não é matematicamente coerente simplesmente somar 4, então ao mesmo tempo que é somado 4 é subtraído 4.

$$x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x \tag{8.0.11}$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4 \tag{8.0.12}$$

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \tag{8.0.13}$$

Multiplicar Por 1

Frequentemente a técnica de multiplicar por 1 é utilizada de uma maneira um tanto quanto inconsciente. Por exemplo, na situação da seguinte fração, $\frac{2}{\sqrt{2}}$, este $\sqrt{2}$ no denominador não é esteticamente agradável, então é de bom gosto de livrar dele de alguma forma, multiplicando por 1. Uma maneira seria multiplicando por $\sqrt{2}$ para que o denominador se anulasse, mas novamente, seria matematicamente não coerente, mas é permitido ao mesmo tempo que multiplicado por $\sqrt{2}$, também seja dividido por $\sqrt{2}$, como a divisão de qualquer número por ele mesmo é 1, essencialmente se trata de uma multiplicação por 1.

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 1 \tag{8.0.14}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \tag{8.0.15}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \tag{8.0.16}$$

Referências

[1] Leonard Susskind and George Hrabovsky. *The theoretical minimum: what you need to know to start doing physics*. Basic Books, 2014.

[2] Kenneth Franklin Riley, Michael Paul Hobson, and Stephen John Bence. Mathematical methods for physics and engineering, 1999.

[3] Carlos MURAKAMI and Gelson IEZZI. Fundamentos de matemática elementar-conjuntos, funções-vol. 1, 2004.

[4] Gelson Iezzi. *Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações*. Atual, 2005.

[5] Gelson IEZZI. Fundamentos de matemática elementar–vol. 3–trigonometria. *Atual Editora*, 2013.

[6] James Ward Brown and Ruel V Churchill. *Variáveis complexas e aplicações*. McGraw Hill Brasil, 2015.

[7] Keith J Devlin. *Introduction to mathematical thinking*, volume 331. Keith Devlin Palo Alto, CA, 2012.

[8] Tom M Apostol. *Calculus, volume 1*. John Wiley & Sons, 1991.

[9] Jason Socrates BARDI. A guerra do cálculo. *Rio de Janeiro: Record*, 2008.

[10] Michael Spivak. *Calculus*. Reverté, 2019.

[11] Hamilton L Guidorizzi. Um curso de cálculo, volume i, 5a edição. *Editora LTC. Rio de Janeiro*, 2015.

[12] Jon Rogawski. *Cálculo-V1*. Bookman Editora, 2015.

[13] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)*, volume 394. Editora Blucher, 2013.