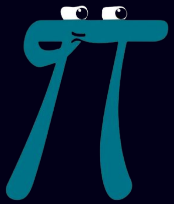
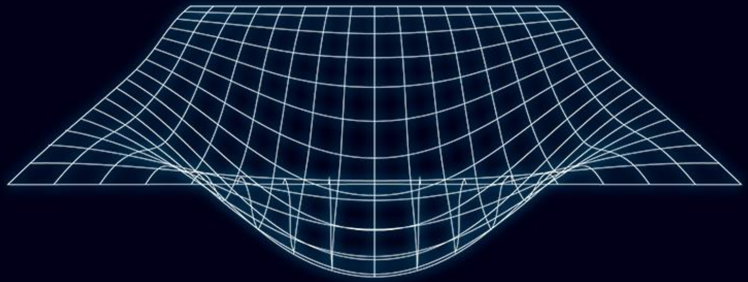


Representações, Algebras de Lie e Geradores dos Grupos de Lorentz e Poincaré



Alunos:
Caio César Rodrigues Evangelista

Professor:
Dr. Roberto Vinhaes Maluf

Observação

- **Representação de Poincaré**

$$P^\mu = i\partial^\mu$$

Conhecendo a Notação:

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

$$J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_i^{jk} J_{jk} \rightarrow \text{Geram rotações}$$

$$K_i = J_{0i} \rightarrow \text{Geram boosts na direção } x^i$$

O que permite definir:

$$N_i^+ = J_i + iK_i$$

$$N_i^- = J_i - iK_i$$

Pela última definição, podemos fazer agora uma investigação da algebra e por consequência da representação.

Relações de Comutação

$$\left[N_i^+,\, N_j^+\right] = \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i),\, \frac{1}{2}(J_i - iKi)\right]$$

$$= \frac{1}{4}([J_i,\, J_i] + i[J_i,\, K_j] + i[K_i,\, J_j] - [K_i,\, K_j])$$

$$\Longleftrightarrow \left[N_i^+,\, N_j^+\right] = \frac{1}{4}(i\varepsilon_{ijk}J_k - \varepsilon_{ijk}K_k + \varepsilon_{jik}K_k + i\varepsilon_{ijk}J_k) = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}(J_k + iK_k)$$

$$\Longleftrightarrow \left[N_i^+,\, N_j^+\right] = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}N_k^+ \quad \Rightarrow \left[N_i^-,\, N_j^-\right] = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}N_k^-$$

Relações de Comutação

$$\left[N_i^+,\, N_j^-\right] = \frac{1}{4}[J_i + iK_i,\, J_j - iK_j] = \frac{1}{4}([J_i,\, J_j] - i[J_i,\, K_j] + i[K_i,\, J_j] + [K_i,\, K_j])$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[N_i^+,\, N_j^-\right] = \frac{1}{4}(i\varepsilon_{ijk}J_k + \varepsilon_{ijk}K_k - i\varepsilon_{ijk}J_k)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[N_i^+,\, N_j^-\right] = 0$$

Então as relações são ao todo dadas por:

$$\left[N_i^+,\, N_j^+\right] = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}N_k^+; \quad \left[N_i^-,\, N_j^-\right] = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}N_k^-;$$
$$\left[N_i^+,\, N_j^-\right] = 0$$

Relações de Comutação

$$\therefore SO(1,3) \cong SU(2)_L \times SU(2)_R$$

Isto é um resultado impressionante! Uma conclusão a partir disto é que se houver um espaço de Hilbert de dimensão finita invariante sobre a relatividade restrita. Então, é possível representar o grupo de Lorentz em termos de pares das representações usuais de rotação do **SU(2).**

$$\mathfrak{so}(1,3) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$$

Identificação de Partículas na Natureza

- **Representação Trivial:**
  - Hilbert 1-dimensional
  - Span por objetos de única componente
  - Representada por spin (0,0)
  - Se "transformam" por **SO(1,3)**, da forma:

$$\phi \rightarrow \phi'; \qquad \phi' = \Lambda \phi$$

$$\phi' = \Lambda \phi \Longrightarrow \phi' = 1 \cdot \phi \iff \phi' = \phi$$

Identificação de Partículas na Natureza

- **Representação Spinorial:**
  - (½ , 0) $\longrightarrow$ spinor esquerdo $\longrightarrow$ se transforma somente sobre **SU(2)** L.H
  - (0 , ½) $\longrightarrow$ spinor direito $\longrightarrow$ se transforma somente sobre **SU(2)** R.H
  - Spinores de Weyl
  - Com cobrimento duplo de *Spin(1, 3)* sobre **SO(1,3)**

$$\mathrm{Spin}(1,\,3) \cong SL(2,\,\mathbb{C}) \implies D(\mathrm{SO}(1{,}3)) = D(SL(2,\mathbb{C}))$$

$$\psi_\alpha \to \left(\frac{1}{2},\,0\right); \quad \psi_\alpha = M_\alpha^{\beta}\psi_\beta, \quad M \in SL(2,\,\mathbb{C})$$

Identificação de Partículas na Natureza

- **Representação Spinorial:**

$$M = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right); \quad S^{\mu\nu} \equiv D(SL(2,\mathbb{C}))$$

$$S^{ij} = \frac{i}{2}\exp\left(\varepsilon^{ijk}\sigma^k\right) \quad \text{e} \quad S^{0i} = -\frac{i}{2}\sigma^i$$

$$\tilde{\psi}_{\dot{\alpha}} \rightarrow (M^*)_{\alpha}^{\beta}\tilde{\psi_{\beta}}; \quad M^* \in SL(2,\, \mathbb{C})^*$$

$$\psi^*_{\alpha} \rightarrow (M^*)_{\alpha}^{\beta}\psi^*_{\beta}; \quad M^* \in SL(2,\, \mathbb{C})^*$$

$$\Longleftrightarrow \quad \psi^*_{\alpha} = \tilde{\psi}_{\dot{\alpha}}$$

Identificação de Partículas na Natureza

- **Representação Spinorial:**

$$M = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right); \quad S^{\mu\nu} \equiv D(SL(2,\mathbb{C}))$$

$$S^{ij} = \frac{i}{2}\exp\left(\varepsilon^{ijk}\sigma^k\right) \qquad \text{e} \qquad S^{0i} = -\frac{i}{2}\sigma^i$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\psi}_{\dot{\alpha}} \to (M^*)_{\alpha}^{\beta}\tilde{\psi}_{\beta}; \qquad M^* \in SL(2,\,\mathbb{C})^*$$

$$\psi^*_{\alpha} \to (M^*)_{\alpha}^{\beta}\psi^*_{\beta}; \qquad M^* \in SL(2,\,\mathbb{C})^*$$

$$\Longleftrightarrow \quad \psi^*_{\alpha} = \tilde{\psi}_{\dot{\alpha}}$$

Identificação de Partículas na Natureza

- **Representação Spinorial:**

$$\therefore\ \psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \qquad \tilde{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\tilde{\psi}_{\beta}$$

$$\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} \qquad \tilde{\psi_{\dot{\alpha}}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\tilde{\psi^{\beta}}$$

$$\psi_{\alpha} = M_{\alpha}^{\beta}\psi_{\beta} \implies \psi'_{\alpha} = \epsilon^{\sigma\alpha}M_{\alpha}^{\beta}\epsilon_{\beta\gamma}\psi^{\gamma}$$

$$\epsilon^{\sigma\alpha}M_{\alpha}^{\beta}\epsilon_{\beta\gamma} = \left(M^{-1}\right)_{\gamma}^{\sigma} \implies \psi'_{\alpha} = \left(M^{-1}\right)_{\gamma}^{\sigma}\psi^{\gamma} \implies \tilde{\psi'_{\dot{\alpha}}} = \left(\left(M^{*}\right)^{-1}\right)_{\gamma}^{\sigma}\psi^{*\gamma}$$

$$\therefore\ \chi^{\dot{\alpha}} \equiv \tilde{\psi_{\dot{\alpha}}}$$

$$\implies \chi^{\dot{\alpha}} \to \left(\left(M^{*}\right)^{-1}\right)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\chi^{\dot{\beta}} \iff \chi'^{\dot{\alpha}} = \left(\left(M^{*}\right)^{-1}\right)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\chi^{\dot{\beta}};\ M^{*} \in SL(2,\,\mathbb{C})$$

Identificação de Partículas na Natureza

- **Representação Spinorial:**
  - Não invariante sobre paridade
  - Ex: Particula de spin ½
    - Electron

$$\begin{cases} J \to J \\ K \to -K \end{cases} \implies N \to N^T$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{Spin Up}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \text{Spin Down}$$

Algumas Outras Representações

- **Representação Vetorial:**
  - Representação fundamental(irredutivel) para o grupo de Lorentz
  - Dada por (½, ½)
  - Vetor potencial eletromagnetico

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\beta}_{\alpha} x^{\alpha} \iff x'^{\alpha} = \exp\left(\left(\frac{i\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}{2}\right)\right)^{\beta}_{\alpha} x^{\alpha}; \qquad x^{\alpha} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Ex:

$$A'^{\gamma} = \exp\left(\left(\frac{i\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}{2}\right)\right)^{\rho}_{\gamma} A^{\gamma};$$

Algumas Outras Representações

- **Representação Tensorial:**
    - Obedece a transformação de tensores

$$T^{(\rho\sigma)'} = \Lambda^{\rho'}_{\rho}\Lambda^{\sigma'}_{\sigma}T^{\rho\sigma} \quad \text{que pode ser reescrito como } T^{(\rho\sigma)'} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\sigma}}T^{\rho\sigma}$$

$$A^{\rho\prime} = \frac{\partial x^{\rho\prime}}{\partial x^{\rho}}A^{\rho}; \quad B^{\sigma\prime} = \frac{\partial x^{\sigma\prime}}{\partial x^{\sigma}}B^{\sigma} \implies A^{\rho\prime}B^{\sigma\prime} = \frac{\partial x^{\rho\prime}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma\prime}}{\partial x^{\sigma}}A^{\rho}B^{\sigma}$$

$$\therefore \Lambda^{\rho\prime\sigma'}_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\rho\prime}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma\prime}}{\partial x^{\sigma}}$$

Representações de Dimensão Infinita

- **Representações de Campo:**
  - Considerando um campo dependente de coordenadas do espaço-tempo
  - Se transforma pelo grupo de Lorentz da forma:

$$\Phi_a \rightarrow M_a^b(\Lambda)\Phi_b$$

$$\Phi_a(x) \rightarrow M_a^b(\Lambda)\Phi_b\left(\Lambda^{-1}x\right); \quad M = \exp\left(\frac{-i\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}{2}\right)$$

Representações de Dimensão Infinita

- **Representações de Campo:**

$$\therefore \ \exp\left(\frac{-i\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}}{2}\right)\Phi(x) = \Phi\left(\Lambda^{-1}x\right)$$

Considerando então uma transformação infinitesimal com termos de ordem superior desconsideraveis

$$\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\right)\Phi(x) = \Phi((1-\omega)x) \iff L^{\mu\nu}\Phi(x) = -\frac{2i[\Phi(x) - \Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{\mu\nu}}$$

$$\therefore \ \mathcal{L}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(L^{\mu\nu} - L^{\nu\mu}) \iff \mathcal{L}^{\mu\nu}\,\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{2i[\Phi(x) - \Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{\mu\nu}} + -\frac{2i[\Phi(x) - \Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{\nu\mu}}\right]$$

$$\iff \mathcal{L}^{\mu\nu}\ \Phi(x) = -\frac{i[\Phi(x) - \Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{\mu\nu}x^{\nu}}x^{\nu} + -\frac{i[\Phi(x) - \Phi((1-\omega)x)]}{\omega_{\nu\mu}x^{\mu}}x^{\mu}$$

$$\iff \mathcal{L}^{\mu\nu}\ \Phi(x) = i(x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})\Phi(x)$$

Representações de Dimensão Infinita

- **Representações de Campo:**

$$\Phi(x) \rightarrow \exp\left(\frac{-i\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\omega_{\mu\nu}\mathcal{L}^{\mu\nu}}{2}\right)\Phi(x)$$

"A ciência é feita de fatos, assim como uma casa é feita de tijolos, mas um amontoado de fatos não é ciência, assim como um amontoado de tijolos não é uma casa." - Henri Poincaré.